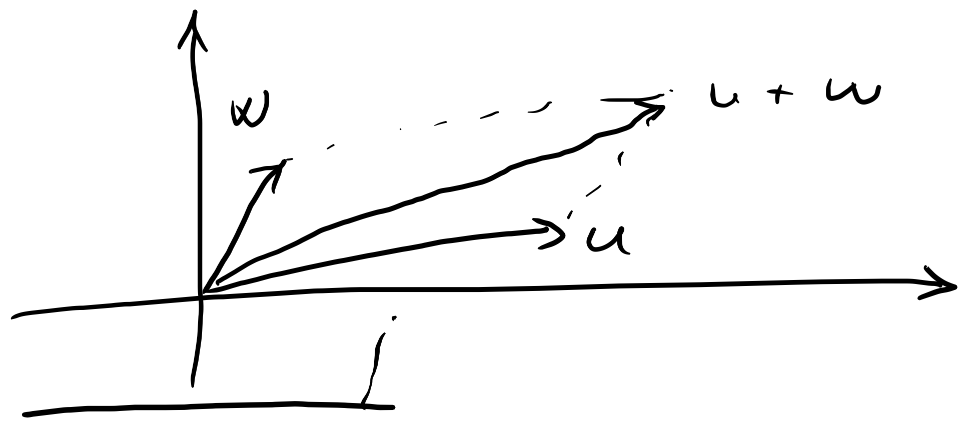
# Lineáris függetlenség (F)



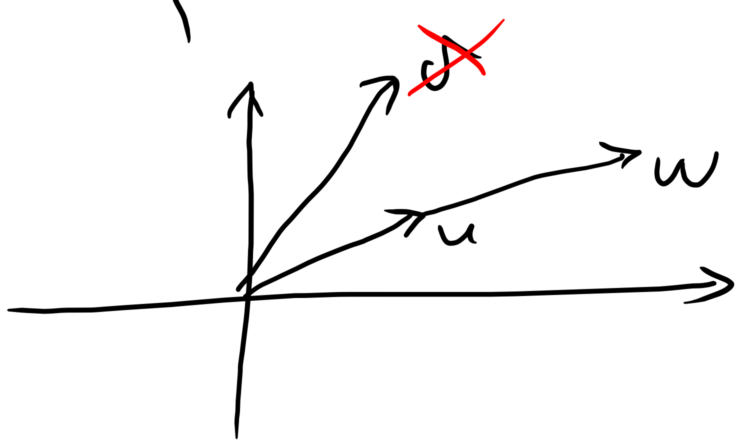

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{bmatrix}$$

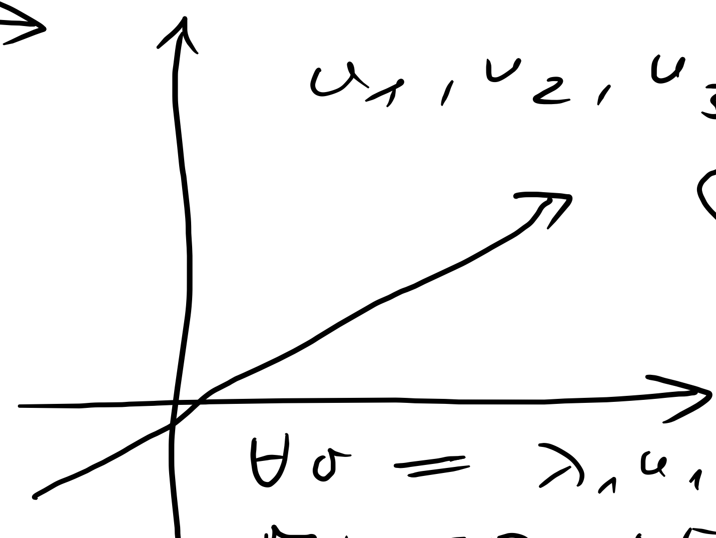

együtthatók

$v = \boxed{\lambda u + \mu w}$ lineáris kombináció

Ha $u \nparallel w$, akkor ez megy!

$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ $\parallel$-e?



$u_1, u_2, u_3$

$(0, u_1, u_2, u_3$ végpontjai$)$

$\forall v = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda u_3$

MIKOR LEHET?

Akkor ha $u_1, u_2, u_3$ nincs egy síkban

$u_1, \dots, u_n$ Mikor lehet $\forall$ vektort kifejezni

Mikor vannak egy síkban.

---

<u>Def.</u> $u_1, \dots, u_n$ (F) ha

$\forall$ $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ skalárokra

HA $\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n = 0$ AKKOR $\underbrace{\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0}_{\text{TRIVIÁLIS lin. komb.}}$.

---

~~Azaz~~ a 0 csak triviálisan áll elő.

---

síkon $v_1 \nparallel v_2$ (F)

$v_1, v_2, v_3$ nincs egy síkban, ha (F).

$$x\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}+z\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$ $\rightarrow$ lin. egyenletrendszer (homogén)

$$\begin{bmatrix}x\\0\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\0\\y\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\z\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\z\\y\end{bmatrix}\qquad \left.\begin{aligned}x&=0\\z&=0\\y&=0\end{aligned}\right\}\quad F$$

$F \Leftrightarrow$ nincs szabad változó.

---

$$x\begin{bmatrix}1\\4\\7\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}2\\5\\8\end{bmatrix}+z\begin{bmatrix}3\\6\\9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x+2y+3z\\4x+5y+6z\\7x+8y+9z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&3&0\\4&5&6&0\\7&8&9&0\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&3&0\\0&-3&-6&0\\0&-6&-12&0\end{array}\right]\sim\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}x&y&z&\end{array}\\\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&-1&0\\0&1&2&0\\\cancel{0}&\cancel{0}&\cancel{0}&\cancel{0}\end{array}\right]\end{array}\Rightarrow \text{STOP}$$

1. sor 4-szeresét $\ominus$ a 2.-ból, stb.

$$\Rightarrow\quad \begin{aligned}x-z&=0\\y+2z&=0\end{aligned}$$

$$(x,y,z)=\boxed{(z,-2z,z)}$$

$(1,-2,1)$ nemtriv. m.o. $\Rightarrow$ ÖF

$$\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}6\\1\\0\end{bmatrix}$$

$$\underline{0} \qquad \underline{1} \qquad \underline{0}$$

Ha van 0 vektor

akkor ÖF

$$\begin{bmatrix}1\\1\\3\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}2\\1\\2\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}1\\1\\3\end{bmatrix}$$

$$\underline{1} \qquad \underline{0} \qquad \underline{-1}$$

Ha van két = vektor

$\Rightarrow$ ÖF

$v, \lambda v$ is van $\rightsquigarrow$ öf

$\lambda \cdot v - 1 \cdot \lambda v + 0 \cdot$ többi $= 0$.

---

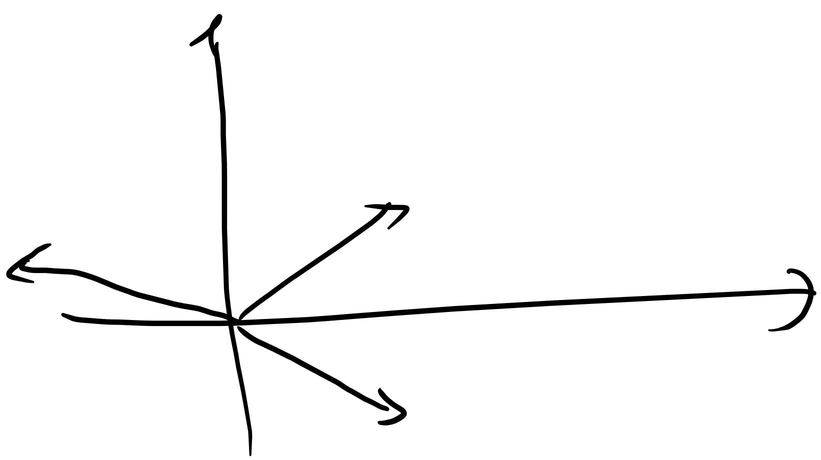
Nemszinguláris mátrixra

oszlopai F $\Leftrightarrow$ $\det \neq 0$ $\Leftrightarrow$ sorai F

$v \parallel w \iff v$ és $w$ ÖF $\iff$ VALAMELYIK a másik $\lambda$-szorosa.
(a két oldal "arányos")

Ha $v, w \neq 0$ mindkettő a másik skalárszorosa

(A síkban $\exists$ 3 öf)



öf, de nincs 2 $\parallel$.

1 vektor ÖF $\iff v = 0$.

---

$\lambda v = 0$, $v \neq 0 \implies \lambda = 0$.

$1, x, x^2$ $\mathbb{R}[x]$-ben $\underbrace{\mathbb{R} \text{ fölött}}_{\text{skalárok valósak}}$ F?

$$\alpha \cdot 1 + \beta \cdot x + \gamma x^2 = 0 \implies \alpha = \beta = \gamma = 0.$$

2 polinom $=$ $\iff$ a megfelelő együtthatók egyenlők.

$$\alpha(1+x) + \beta(1+x^2) + \gamma(x+x^2) = 0$$

x szerint rendezzük.

$$\left.\begin{array}{lll} 1 & \alpha + \beta = 0 \\ x & \alpha + \gamma = 0 \\ x^2 & \beta + \gamma = 0 \end{array}\right\} \overset{\text{lf}}{\implies} \alpha = \beta = \gamma = 0$$

F

$x, \quad 2x, \quad x^2, \quad x^3$ Van 2 „párhuzamos" x és 2x

$-2 \quad 1 \quad 0 \quad 0$

$1+x, \quad 1+2x \quad 1+3x$

Hány egyenlet van? 2 $(1, x)$

Hány ismeretlen? 3

nincs

① oszlopban

3 oszlop, 2 sor L

$\implies$ nem egyért.

$\implies$ ÖF

$\alpha(1+i)+\beta(1+2i)+\gamma(1+3i)=0$

$\mathbb{R}$ felett $\Rightarrow \alpha,\beta,\gamma$ valós

Re $\quad \alpha+\beta+\gamma=0$ $\quad \Rightarrow$ ōf innen az előző

Im $\quad \alpha+2\beta+3\gamma=0$

---

3/(c) IF

$v_1, v_2, v_3$ F $\quad \Rightarrow \quad \underbrace{v_1-3v_2,\ v_2,\ v_3}$ is F

$\alpha(v_1-3v_2)+\beta v_2+\gamma v_3=0$

Rend. a pol-nál : $v_i$ szerint rendezni

$v_1 \quad \alpha=0$

$v_2 \quad \beta-3\alpha=0 \Rightarrow \beta=0$ $\quad$ F

$v_3 \quad \gamma=0$

$$\begin{rcases} \cancel{\lambda_1 \left( x^{17} + 8x^6 + 4x^2 + 2 \right) +} \\ \lambda_2 \left( \qquad 7x^6 - 3x^3 + 5x^2 + 4 \right) + \\ \lambda_3 \left( \qquad\qquad 5x^4 + 6x^2 + 8 \right) = 0 \end{rcases}$$

---

$\lambda_1 x^{17} = 0$ Legmagasabb fokúban a főegyütt.

$x^6$
másodikban ugyanez, stb.

---

I/4. csupa kül. fokú $\Rightarrow$ F.

---

I/5 $\gamma(x-a)(x-b) + \beta(x-c)(x-c) + \alpha(x-b)(x-c) = 0$

$x = a$ $\qquad \underset{0}{(x-a)} \qquad \beta(\underset{\neq 0}{a-c})(\underset{\neq 0}{b-c}) = 0 \qquad \underset{0}{(x-b)}$

$\Rightarrow \beta = 0$

stb. $x = b$
$x = c$.