Bsc algebra3a gyakorlat

Második zárthelyi (2021. december 6.) — eredmények és pontozás

1. A normája 15 (1 pont), ezért az inverze $(1/15)(2+i+j-3k)$ (1 pont). Valós része 2, ezért minimálpolinomja $x^2-4x+15$ (2 pont). Ide behelyettesítve a négyzete $-7-4i-4j+12k$ (2 pont). (A négyzete természetesen közvetlen szorzással is kiszámolható.)

2. A megadott polinomba helyettesítve $\alpha^3=\alpha+1$, ezért α-val leosztva és átrendezve $1/\alpha=\alpha^2-1$. Így $\alpha^2/(\alpha+1)=\alpha^2/\alpha^3=1/\alpha=\alpha^2-1$ (6 pont). A feladat a tanult algoritmussal (keresztbe szorzás, α hatványainak redukálása, lineáris egyenletrendszer) is megoldható.

3. (1): Mivel $3-4i=(2-i)^2$, ezért a bővítést i generálja, tehát másodfokú.
(2): A Schönemann–Eisenstein miatt $\sqrt[27]{3}$ foka $\mathbb{Q}$ fölött 27. Hasonlóan $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{3})$ foka $\mathbb{Q}$ fölött 3. De $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{3}+1)=\mathbb{Q}(\sqrt[3]{3})\leq\mathbb{Q}(\sqrt[27]{3})$ (kilencedik hatványra emeléssel). Ezért az eredmény $27/3=9$.
(3): A Schönemann–Eisenstein miatt $\sqrt[5]{3}$ foka $\mathbb{Q}$ fölött 5. Mivel 5 prím, ebben a bővítésben minden irracionális szám ötödfokú, speciálisan $\sqrt[5]{9}$ is.
(4): A felbontási testet generálja $\sqrt[15]{2}$ és egy primitív 15-ödik egységgyök. Előbbi foka 15, utóbbi foka $\varphi(15)=8$. Mivel ezek relatív prímek, a keresett fokszám 120.

4. Mivel $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$, a felbontási test foka legfeljebb 2. De x^2+x+1-nek nincs gyöke $\mathbb{Z}_5$-ben, ezért a felbontási test elemszáma 5^2 (3 pont). A multiplikatív csoport ciklikus és 24 elemű, ezért a d rendű elemek száma $\varphi(d)$, ha $d\mid 24$, és nulla egyébként (3 pont). Ha α rendje 12, akkor gyöke az $x^{12}-1=(x^6-1)(x^6+1)$ polinomnak. De $\alpha^6\neq 1$, ezért gyöke a második tényezőnek, ami $(x^2+1)(x^4-x^2+1)$ (valójában $x^{12}-1$-et körosztási polinomok szorzatára bontottuk föl $\mathbb{Z}$ fölött). Tudjuk, hogy $\alpha^2+1\neq 0$, hiszen $\alpha^4\neq 1$. Ezért $\alpha^4-\alpha^2+1=0$ (azaz α gyöke a mod 5 vett Φ_{12} körosztási polinomnak). Összesen $\varphi(12)=4$ darab 12 rendű elem van, ezek éppen e negyedfokú polinom gyökei. Mivel másodfokú bővítés elemei legfeljebb másodfokúak, ez a polinom fel kell, hogy bomoljon másodfokúakara $\mathbb{Z}_5$ fölött. Ez így is van, a felbontás $(x^2-2x-1)(x^2+2x-1)$. Tehát a 12 fokú elemek e két másodfokú polinom gyökei $\mathbb{Z}_5$ fölött. *Második megoldás:* Az első megoldásban írtak alapján $\alpha^5\alpha=\alpha^6=-1$, továbbá $\alpha^4-\alpha^2+1=0$. Ezért $\alpha+\alpha^5=\alpha^3$, aminek a négyzete $\alpha^6=-1=4$, ezért $\alpha+\alpha^5=\pm 2$. Vagyis $(x-\alpha)(x-\alpha^5)=x^2\pm 2x-1$. *Megjegyzés:* A 12-edik primitív egységgyökök $\mathbb{C}$-ben $(\pm\sqrt{3}\pm i)/2$. Ha $\mathbb{Z}_5$ ben vizsgálódunk, akkor i helyett írhatunk 2-t (vagy $-2=3$-at), hiszen $2^2=-1$. Ezért ha a 9 elemű testet $\mathbb{Z}_5(\sqrt{3})$-nak képzeljük, akkor e számok minimálpolinomját kell csak fölírni. De most nem a komplex konjugáltakat kell egymással párosítani, hanem $(\sqrt{3}+i)/2$ párja az ötödik hatványa, tehát $(-\sqrt{3}+i)/2$ lesz. A kettő szorzata $(i^2-\sqrt{3}^2)/4=-1$, összege i lesz, amit most 2-nek vettünk, vagyis az x^2-2x-1 polinomot kapjuk.

5. Az $f(x)+(4,3x^2)$ maradékosztályban keressünk reprezentánselemet. Mivel 4 benne van az ideálban, benne van $4x^2$ is, és ezért $4x^2-3x^2=x^2$ is. Így $f(x)$ helyettesíthető $a+bx$-szel, ahol a az f konstans tagjának, b pedig f-ben az x együtthatójának 4-gyel való osztási maradéka. Ezek a reprezentánsok már páronként különböző maradékosztályban vannak, mert ha két ilyen reprezentáns ugyanoda esne, akkor a különbségük, $a+bx=4p(x)+3x^2q(x)$ alakban lenne írható, ahol $p,q\in\mathbb{Z}[x]$. A két oldalon a konstans tagot és az x-es tagot összehasonlítva láthatjuk, hogy $4\mid a$ és $4\mid b$. Így tehát a faktorgyűrűnek $4\cdot 4=16$ eleme van. A szorzás szabálya pedig $(a+bx)(c+dx)=ac+(ad+bc)x$, ahol az együtthatókkal mod 4 kell számolni.

Ha $a+bx$ invertálható, vagyis $(a+bx)(c+dx)-1\in(4,3x^2)$, akkor a fenti szabály szerint $ac=1$, így a nem lehet páros. Ha viszont páratlan, vagyis $a=\pm 1$, akkor $a-bx$ inverze lesz $a+bx$-nek, hiszen $(a+bx)(a-bx)=a^2=1$. Vagyis a kétféle, b tetszőleges, ez összesen 8 invertálható elem.

Az I ideálban a $bx+(4,3x^2)$ alakú elemek vannak, ezek száma 4. Az $a+bx+(4,3x^2)$ elemnek az I szerinti mellékosztályából tehát választhatjuk $a+(4,3x^2)$-et reprezentánsnak. Ezekkel mod 4 kell számolni, tehát $R/I\cong\mathbb{Z}_4$.