

## Bsc algebra3a gyakorlat

Második zárthelyi, 2021. december 6.

Mindegyik feladatban **indoklás szükséges**, a puszta eredményért nem jár pont. Használni semmilyen segédeszközt nem szabad, kalkulátort, mobiltelefont sem. A ZH alatt nem lehet kimenni a teremből. Minden lapon **OLVASHATÓ NAGYBETŰKKEL** szerepeljen a név és a NEPTUN-kód. A dolgozat jegye az összpontszám hatodrésze.

**1. (6 pont)** Számítsuk ki a  $2 - i - j + 3k$  kvaternió négyzetét, inverzét és minimálpolinomját. (A minimálpolinomot valós fölött tekintjük, hiszen a kvaterniók valós fölötti algebrát alkotnak.)

**2. (6 pont)** Legyen  $\alpha$  az  $x^3 - x - 1$  polinom egyik komplex gyöke. Írjuk föl az  $\alpha^2/(\alpha + 1)$  számot  $a + b\alpha + c\alpha^2$  alakban, ahol  $a, b, c \in \mathbb{Q}$ .

**3. (4 + 4 + 4 + 4 pont)** Számítsuk ki az alábbi fokszámokat.

(1)  $\sqrt{3 - 4i}$  foka  $\mathbb{Q}$  fölött.

(2)  $\sqrt[27]{3}$  foka  $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{3} + 1)$  fölött.

(3)  $\sqrt[5]{9}$  foka  $\mathbb{Q}$  fölött.

(4)  $x^{15} - 2$  felbontási testének foka  $\mathbb{Q}$  fölött.

**4. (6 + 6 pont)** Határozzuk meg az  $x^3 - 1$  polinom felbontási testének elemszámát  $\mathbb{Z}_5$  fölött, továbbá e test multiplikatív csoportjában az elemek rendjeit (milyen rendű hány darab van). Extra 6 pontért adjunk meg egy olyan  $\mathbb{Z}_5$  fölött irreducibilis polinomot is, amelynek gyökei ebben a felbontási testben 12 rendűek.

**5. (6 + 6 pont)** Számítsuk ki a  $R = \mathbb{Z}[x]/(4, 3x^2)$  faktorgyűrű elemszámát (3 pont) és az invertálható elemeinek a számát (3 pont). Legyen  $I$  az  $R$ -ben az  $x + (4, 3x^2)$  elem által generált ideál. Melyik ismert gyűrűvel izomorf az  $R/I$  faktorgyűrű?

