$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

$3\times 3$ : SARRUS - stabály

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 4 & 5 \\ 7 & 8 & 9 & 7 & 8 \end{array}\right.$$

$-$ $+$

$$1\cdot 5\cdot 9 + 2\cdot 6\cdot 7 + 3\cdot 4\cdot 8$$
$$-3\cdot 5\cdot 7 - 1\cdot 6\cdot 8 - 2\cdot 4\cdot 9 =$$
$$= 45 + 84 + 96 -$$
$$-105 - 48 - 72 = \underline{\underline{0}}$$

$\det = 0.$

---

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 9 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot 5\cdot 1 + 3\cdot 9\cdot 3 + 5\cdot 2\cdot 2 -$$
$$- 5\cdot 5\cdot 3 - 1\cdot 9\cdot 2 - 3\cdot 2\cdot 1 =$$
$$= 5 + 81 + 20 -$$
$$- 75 - 18 - 6 = 106 - 99 = \underline{\underline{7}}$$

Gauss-elimináció.

1. Egyik sorból $\ominus$ egy másik sor számszorosát. Ilyenkor det nem változik.

2. $$\begin{vmatrix} & * & \\ ca_1 & \cdots & ca_n \\ & * & \end{vmatrix} = c \cdot \begin{vmatrix} & * & \\ a_1 & \cdots & a_n \\ & * & \end{vmatrix}$$

sorból számot ki lehet emelni.

3. sorcserénél a det előjelet vált.

---

[ugyanezeket oszlopokkal is szabad.]

Elég a főátló alatt nullázni:

$$\begin{vmatrix} a_1 & & * \\ 0 & \ddots & \\ \vdots & & \\ 0 & \cdots\ 0 & a_n \end{vmatrix} = a_1 a_2 \cdots a_n$$

Felső $\Delta$-mátrix determinánsa a főátlóbeli elemek szorzata.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1\cdot(-3)\cdot 0 = \underline{\underline{0}}$$

1. sor 4x-ét − 2. sorból

1. sor 7x-ét − 3. sorból

2. sor 2x-ét − 3. sól

Alternatív út

$$= (-3)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -6 & -12 \end{vmatrix} =$$ ugyanaz az eredmény.

---

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 9 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -7 & -14 \end{vmatrix} = (-1)(-7)\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 7\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 7\cdot 1\cdot 1\cdot 1 = \underline{\underline{7}}.$$

SORCSERE!

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

3 csere

$$= \boxed{-1}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= (-2)^3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & +4 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -8 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & +1 & -1 \end{vmatrix} = -8 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{vmatrix}$$

$$= (-8) 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot (-6) = \underline{\underline{48}}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1\cdot 2\cdot 2\cdot 2 = \underline{\underline{8}}$$

első sort ⊖ többi

---

$$\begin{vmatrix} 6 & 6 & 6 & 6 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 6 \begin{vmatrix} \phantom{0} \end{vmatrix} = 6\cdot 8 = 48.$$

---

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} =$$

első sorhoz ⊕ többit

HF 3. Feladat

2. det

$$\begin{vmatrix} x & & a \\ & x & \\ a & \cdots & x \end{vmatrix} = ? \quad n \times n$$

$$\begin{vmatrix} 1 & & & & 2 \\ & 2 & & & \\ & & 3 & & \\ & & & \ddots & \\ 2 & & & & n \end{vmatrix} \underset{\substack{2\text{ sor} \\ \ominus \text{ többi}}}{=} H \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \boxed{0} & 2 & 2 & \dots & 2 \\ & & 1 & & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & n-2 \end{vmatrix} = \underline{\underline{-2(n-2)!}}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ \boxed{2} & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ \boxed{0} & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} =$$

2. sort ⊖ a többiből

1. sor 2x-ét ⊕ 2. sorhoz

$= (-1) 2 \cdot 1 \cdot 2 = \boxed{-4}$.

6. $|$egész$|$ ∀ oszlopösszeg 7-tel osztható

Kell: $7 \mid \det$.

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 11 & 9 \\ 3 & 6 & 3 \end{vmatrix} = 7 \underbrace{\begin{vmatrix} \text{egész} \end{vmatrix}}_{\text{egész.}} \checkmark$$

1. sorhoz ⊕ a többit

7-et kiemeljük az 1. sorból.

Det. kifejtése

$$\begin{vmatrix} 1 & \boxed{2} & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

(i. sor j. elem $(-1)^{i+j}$.)

2 sort, oszlopot kihúzzuk.

$$\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = 4\cdot 9 - 7\cdot 6 = 36 - 42 = \underline{\underline{-6}}$$

↗ Aldet, ami $\boxed{2}$-hez (1. sor 2. elemhez tartozik).
Megszorozzuk a sakktábla előjellel: $(-1)(-6) = 6$.

ELŐJELES ALDETERMINÁNS.

$\boxed{1}$-hez $\quad + \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = 45 - 48 = -3$

$\boxed{3}$-hoz $\quad + \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 32 - 35 = -3$

1. sor szerinti KIFEJTÉS:

$\sum$ elem $\cdot$ (előjeles aldet) $=$ det.

$$1\cdot(-3) + 2\cdot(6) + 3(-3) = -3 + 12 - 9 = \underline{\underline{0}}.$$

3. ostlop razvit

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 3 \cdot \left(+ \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}\right) + 6\left(- \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}\right) + 9 \cdot \left(+ \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}\right) =$$

3. onlop

$$= 3(-3) + 6(-(1 \cdot 8 - 2 \cdot 7)) + 9(1 \cdot 5 - 2 \cdot 4)$$

$$= -9 + 6(-6) + 9(-3) = \underline{\underline{0}}.$$

---

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 9 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 3\left(- \begin{vmatrix} 2 & 9 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}\right) + 5\left(+ \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}\right) + 2\left(- \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 9 \end{vmatrix}\right) =$$

2. onlop razvit

$$= 3(\cdot 25) + 5(-14) + 2(\cdot 1) =$$

$$= 75 - 70 + 2 = \underline{\underline{7}}$$

---

# VANDERMONDE-det.

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & x_2-x_1 & x_2^2-x_1x_2 \\ 1 & x_3-x_1 & x_3^2-x_1x_3 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} x_2-x_1 & x_2^2-x_1x_2 \\ x_3-x_1 & x_3^2-x_1x_3 \end{vmatrix} = (*)$$

kifejtés az 1. sor szerint

ÖTLET:
az utolsó oszloppal kezdve $\forall$ oszlopból $\ominus$ az előző $x_1$-szeresét!

2. sorból $x_2-x_1$
3. sorból $x_3-x_1$

kiemelhető $(*) = (x_2-x_1)(x_3-x_1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & x_2 \\ 1 & x_3 \end{vmatrix} = (x_2-x_1)(x_3-x_1) \cdot (x_3-x_2)$.

2×2-es Vandermonde

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 \\ 1 & x_4 & x_4^2 & x_4^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & & & \\ 1 & & \cdots & \\ 1 & & & \end{vmatrix} = (x_2-x_1)(x_3-x_1)(x_4-x_1) \cdot 3\times 3 \text{ VANDERMONDE}$$

$\rightsquigarrow$

4x4-es eredménye

$$(x_2-x_1)(x_3-x_1)(x_4-x_1)\,(x_3-x_2)(x_4-x_2)(x_4-x_3).$$

3x3-as
$x_2, x_3, x_4$ van a
3 oszlopban!

HF indukcióval:

$n\times n$-esre

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \\ 1 & x_n & & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\le i<j\le n}(x_j-x_i).$$

SPEC:
$\neq 0$, ha $\forall$ $x_i$ különböző.

$$\begin{vmatrix} a & b & & & & \\ c & a & b & & 0 & \\ & c & a & b & & \\ & & & \ddots & & \\ & 0 & & c & a & b \\ & & & & c & a \end{vmatrix}$$

TRIDIAGONÁLIS

$4\times4$

$n\times n$ : $\underline{D_n}$.

$$D_4 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = $$

1. sor szerint kifejtem

$D_1 = |2| = 2$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3$$

$$= 2\underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}}_{D_3} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$D_2$

1. oszlop szerint kif.

IF: $\boxed{D_n = 2D_{n-1} - D_{n-2}}$

$D_3 = 2\cdot D_2 - D_1 = 2\cdot 3 - 2 = 4$

$D_4 = 2\cdot D_3 - D_2 = 2\cdot 4 - 3 = 5$

Sejtés: $D_n = n+1$

$\Rightarrow$ IF indukcióval biz.