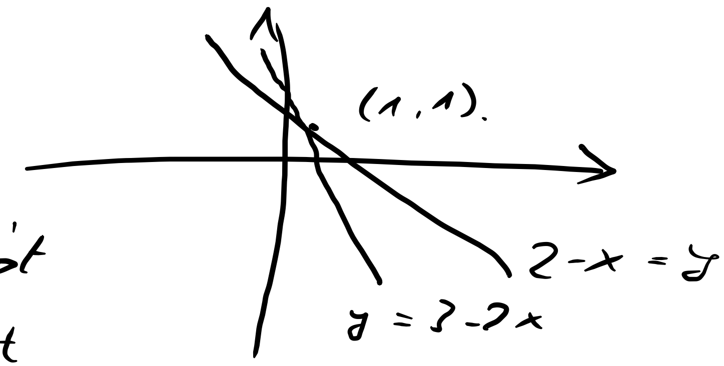
$$\left.\begin{aligned} x+y&=2 \\ 2x+y&=3 \end{aligned}\right\}$$

$y = 2 - x$

$y = 3 - 2x$



---

2. egyenletből kivonjuk az első kétszeresét

Kiesik az x ELIMINÁLJUK x-et.

$-y = -1 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow x = 1$ 2 egyenes metszéspontja.

$$\left.\begin{aligned} x+y&=2 \\ 2x+2y&=3 \end{aligned}\right\}$$

$\rightarrow 0 = -1$ ↯.

Két párhuzamos egyenes.

Nincs megoldás

$$\left.\begin{aligned} x+y&=2 \\ 2x+2y&=4 \end{aligned}\right\}$$ ← felesleges

Két egybeeső egyenes.

$0 = 0$

$y = 2$ $\exists$-e x? $x = 0$

$y = 4$ —"— $x = -2$

$y = v$ —"— $x = 2 - v$

$(x, y) = (2-y, y)$

y tetszőleges.

$$
\begin{aligned}
x + y &= 2 \\
2x + y &= 3
\end{aligned}
\qquad
\begin{array}{cc}
x & y \\
\end{array}
$$

$$
\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{array}\right] \sim
$$

1\. sor 2x-esét $-$ 2. sorból

(1.) Bekarikázunk egy számot a bal oldalon, ami NEM NULLA! ÉS a sorában (és az oszlopában) nincs karika!

GOTO

(2.) (b) ⇝ ezt a sort végigosztjuk b-vel.

(3.) (1) vezéregyes oszlopában kinullázzuk a többi elemet úgy, hogy a (1) sorának alkalmas számszorosát kivonjuk a többi sorból.

$$
\sim \begin{array}{c} \\ \\ \end{array}
\begin{array}{cc|c} x & y & \\ \end{array}
\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right]
$$

(2) és a 2. sort kivonjuk az elsőből.

STOP: ha nem lehet már karikázni.

⇝ vissza egyenlet alakba

$1 \cdot x + 0 \cdot y = 1 \Rightarrow x = 1$

$0 \cdot x + 1 \cdot y = 1 \Rightarrow y = 1$

$(x, y) = (1, 1)$

$$\left.\begin{array}{l} x+y=2 \\ 2x+2y=3 \end{array}\right\} \quad \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

$$0\cdot x + 0y = -1$$

$$0 = -1 \quad ↯$$

TILOS SOR

Bal oldala végig 0,
a jobb oldal nem 0.

NINCS m.o.

Ha ilyen keletkezik $\Rightarrow$ NINCS m.o.

$$\left.\begin{array}{l} x+y=2 \\ 2x+2y=4 \end{array}\right\} \quad \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{array}\right] \sim \begin{array}{c} \begin{array}{cc} x & y \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{array}\right] \end{array} \to (*)$$

CSUPA 0 sor: kihúzzuk!

SZABAD változó: oszlopában nincs 1

y szabad

KÖTÖTT változó: a többi. Most x.

A szabadokat a jobb oldalra és

TETSZŐLEGES ÉRTÉKET KAPHATNAK

$(*)$ $\boxed{x = 2-y}$ $\quad$ $\boxed{(x,y) = (2-y, y)}$ Ált. m.o.

$$\left.\begin{aligned} 2x - 3y + 6z &= 14 \\ -3x + 2z &= 3 \\ x - 6y + 14z &= 31 \end{aligned}\right\}$$ ← Sík egyenlete

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 6 & 14 \\ -3 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & -6 & 14 & 31 \end{array}\right] \sim$$

3. sor 2-szeresét ⊖ 1. sorból

3. sor 3-szorosát ⊕ 2. sorhoz.

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 9 & -22 & -48 \\ 0 & -18 & 44 & 96 \\ 1 & -6 & 14 & 31 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -22/9 & -48/9 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ 1 & 0 & -2/3 & -1 \end{array}\right] \end{array}$$

← 6×osát ⊕ 3.-hoz

$6(-22/9) + 14 = -2/3$

$6(-48/9) + 31 = -1$

STOP

SZABAD: z $\qquad y = 22/9\, z - 48/9$

KÖTÖTT: x, y $\qquad x = 2/3\, z - 1$

$$(x, y, z) = \boxed{\left(2/3\, z - 1,\ 22/9\, z - 48/9,\ z\right).}$$

egyenes egyenlete.

Ell: visszahelyettesítéssel

$$2x - 3y + 6z = 14$$

$$2\left(\tfrac{2}{3}z - 1\right) - 3\left(\tfrac{22}{9}z - \tfrac{48}{9}\right) + 6z \stackrel{?}{=} 14$$

AZONOSSÁG kell, hogy legyen, azaz z kiessen

stb. „stimmeljen"

Mire jó ez az alakja a megoldásnak?

1. Van-e egész megoldás?
2. Mik a pozitív megoldások? $x, y, z > 0$

   $z > 0$ $\quad \tfrac{2}{3}z > 1$ $\quad \tfrac{22}{9}z > \tfrac{48}{9}$.

3. $\min\ x^2 + y^2 + z^2$?

   (a megoldás-egyenes melyik pontja van legközelebb az origóhoz?)

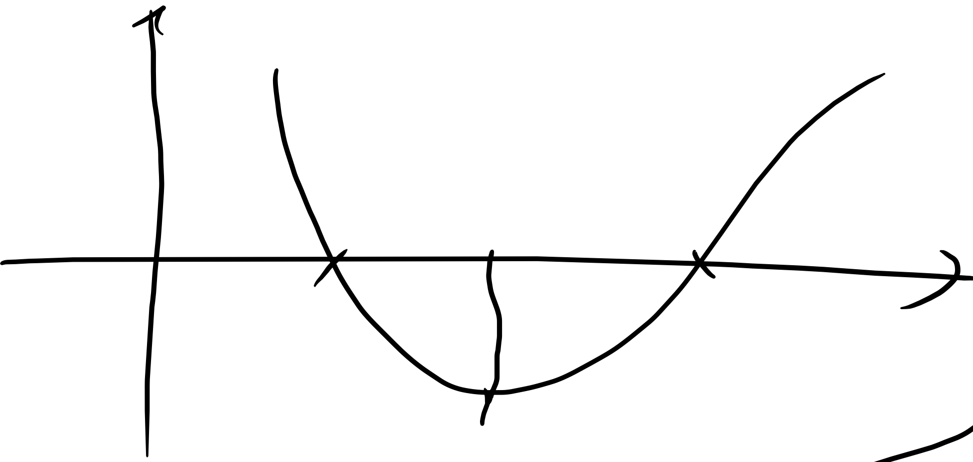
1. $z,\ \tfrac{2}{3}z - 1,\ \tfrac{22}{9}z - \tfrac{48}{9}$ egész.

   z egész, $3 \mid z$, $9 \mid 22z - 48$

   HF.

$$\left(2/3\,z-1\right)^2+\left(22/5\,z-48/5\right)^2+z^2 \quad \min.$$

Pl. deriválással. $\quad az^2+bz+c \quad a>0$



$-b/2a = z$

III/17.

Mi az összefüggés az

- ismeretlenek száma
- a megoldások száma
- az egyenletek száma

} között?

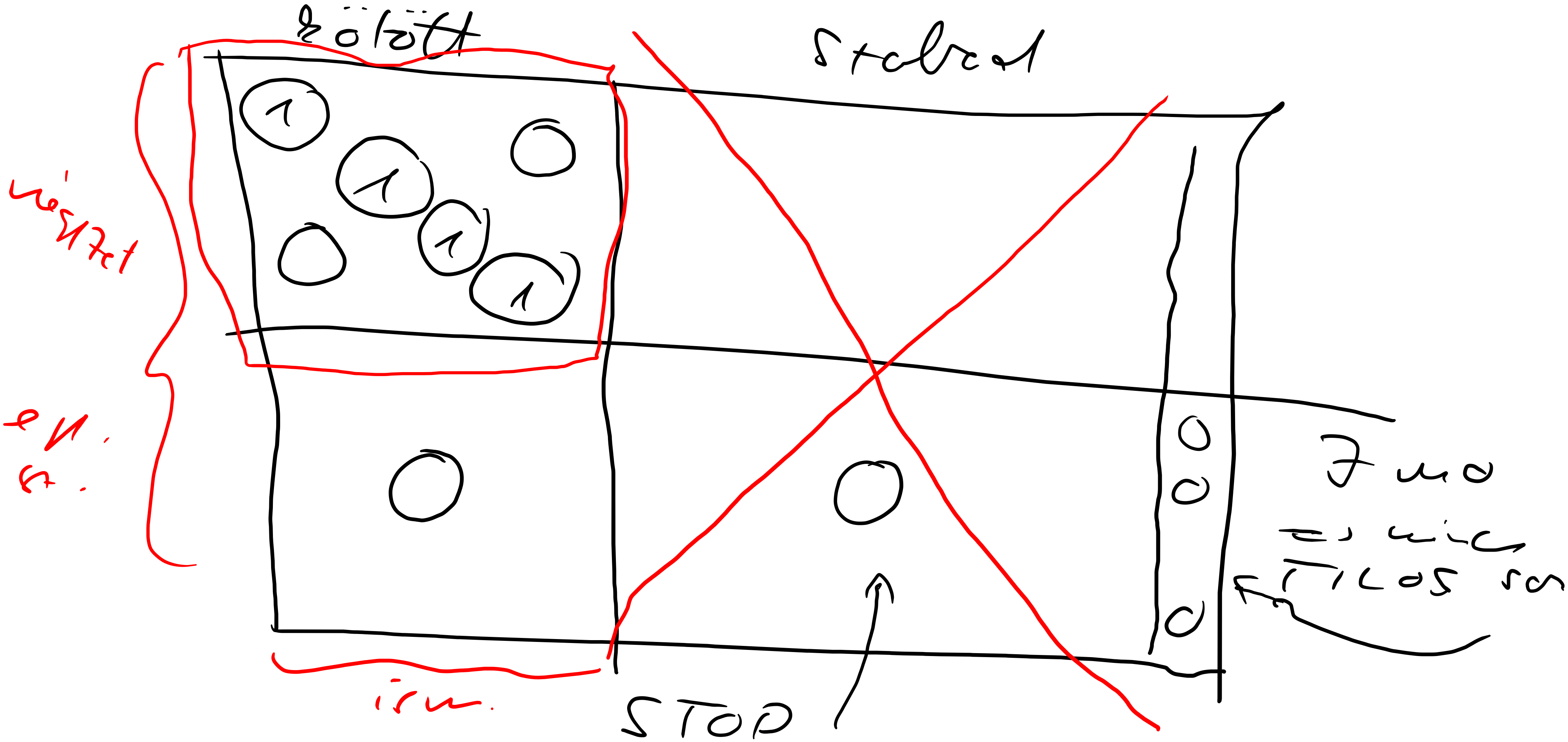
„≥ annyi egyenlet, mint ismeretlen" ????

[$x^2+y^2=0$ $\mathbb{R}$-ben: nem lin. m.o. egyetlen $(0,0)$]

	nem lehet homogén.	HOMOGÉN	
	0 m.o.	1 m.o.	∞ m.o.
ism < egy.	$\left.\begin{aligned} x &= 0 \\ x &= 1 \end{aligned}\right\}$	$\left.\begin{aligned} x &= 0 \\ x &= 0 \end{aligned}\right\}$	$\begin{aligned} x+y &= 0 \\ x+y &= 0 \\ x+y &= 0 \end{aligned}$
ism = egy.	$\left.\begin{aligned} x+y &= 0 \\ x+y &= 1 \end{aligned}\right\}$	$\left.\begin{aligned} x &= 0 \\ y &= 0 \end{aligned}\right\}$	$\left.\begin{aligned} x+y &= 0 \\ x+y &= 0 \end{aligned}\right\}$
ism. > egy.	$\left.\begin{aligned} x+y+z &= 0 \\ x+y+z &= 1 \end{aligned}\right\}$	N	$x+y=0$

$\left.\begin{aligned} x &= 0 \\ y &= 0 \end{aligned}\right\}$

Ha kevesebb az egyenlet, mint az ismeretlen
$\Rightarrow$ NEM EGYÉRT. a m.o.

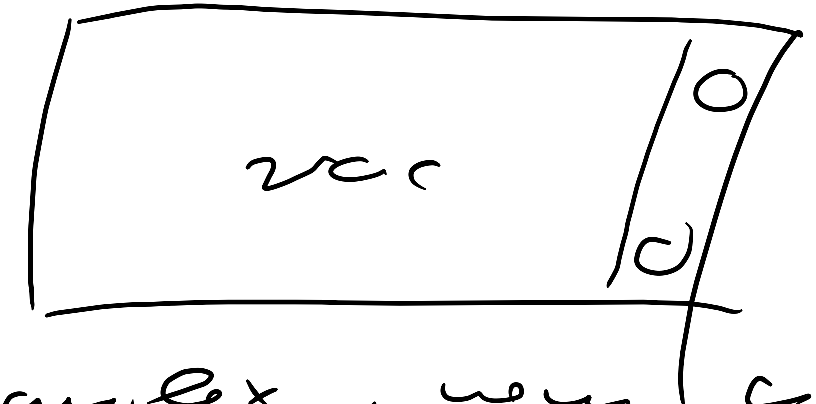


Ha ∃ szabad változó ⇒ nem optimális.

⇒ Ha optimális: nincs szabad

⇒ egy ≥ irány. Quod.

$\mathbb{Q}$ baloldalon



$\exists$ komplex, nem csupa 0 m.o.
rac. megoldás van?

Eliminációnál $+, -, \cdot, :$ $\rightsquigarrow$ csupa rac szám lesz.

M.o. komplex szám.
Van szabad változó?
$\mathbb{Q}$ felett ugyanúgy zajlik az elimináció
ha nincs szabad változó $\Rightarrow$ egyért.
$\Rightarrow$ csak a csupa 0. ↯
$\longrightarrow$ $\exists$ szabad vált.
$\Rightarrow$ $\exists$ szabad vált $\mathbb{Q}$ felett is $\Rightarrow$ nemtriv. m.o. van $\mathbb{Q}$ felett.

Binom. tétel.

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \dots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + b^n.$$

$$\binom{100}{0} + \binom{100}{1} + \dots + \binom{100}{100} = \cancel{?} \qquad (1+1)^{100} = 2^{100}$$

$$\binom{100}{0} + \binom{100}{2} + \dots + \binom{100}{100} = \cancel{?}\, S$$ Alul a párosak

$$\binom{100}{0} + \binom{100}{4} + \dots + \binom{100}{100} = ?$$ Alul 4-gyel osztók.

$a=b=1 \quad n=100$

$$0=(1-1)^{100} = \binom{100}{0} - \binom{100}{1} + \binom{100}{2} - \binom{100}{3} \dots \quad +$$

$a=1 \quad b=-1$ $\qquad 2S = 2^{100} \Rightarrow \boxed{S = 2^{99}}$

HF $(1+i)^{100}$ → binom. t.

→ trig. alakkal.

valós rész

képzetes rész.