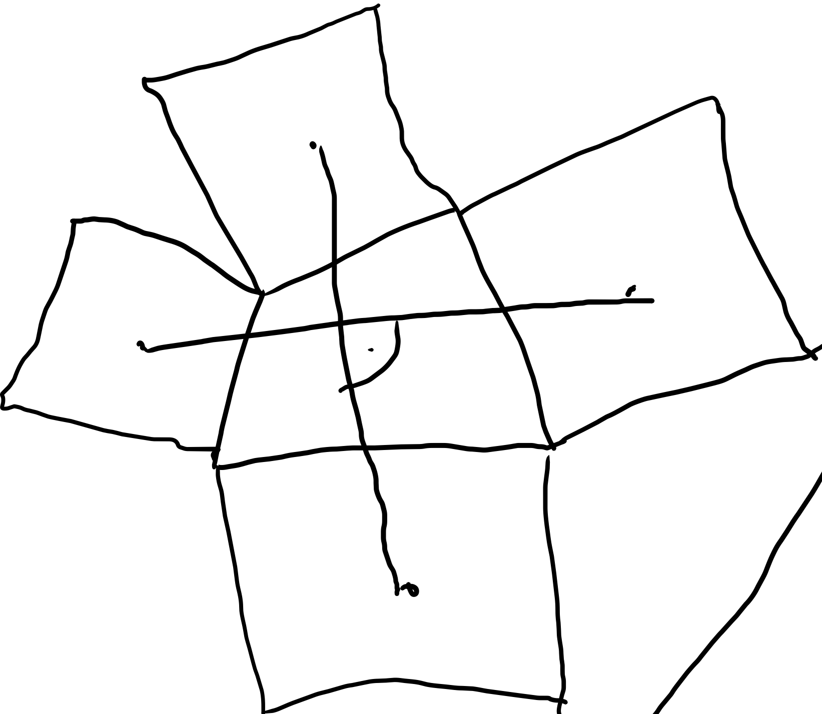
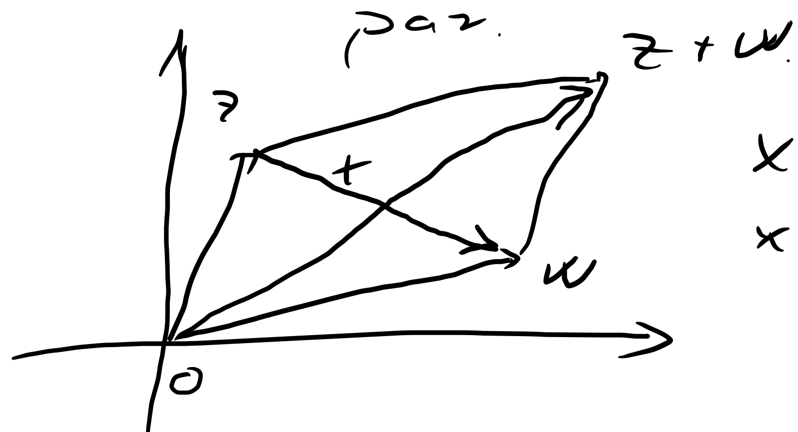


HF II/19,20.

II/18



$x + z = w$

$x = w - z$.

Az oldal négyzetösszege = átlók négyzetösszege.

$$2|z|^2 + 2|w|^2 = |w+z|^2 + |w-z|^2.$$

$$|u|^2 = u\overline{u}.$$

$$(w+z)\underbrace{\overline{(w+z)}}_{\overline{w}+\overline{z}} + (w-z)\underbrace{\overline{(w-z)}}_{\overline{w}-\overline{z}} =$$

$$= w\overline{w} + \cancel{w\overline{z}} + \cancel{z\overline{w}} + z\overline{z} + w\overline{w} - \cancel{w\overline{z}} - \cancel{z\overline{w}} + z\overline{z} \quad \checkmark$$

II / 21.

$8+i$ szöge α

$5+i$ —"— β

$2+i$ —"— γ

$\alpha+\beta+\gamma$ $\quad \underbrace{(8+i)(5+i)(2+i)}_{65(1+i)}$ szöge

$65(1+i) \leftarrow$ szöge $45°$

		n = ? n. egységgyök	n = ? n. pr. e. gy.
1	1	$\forall n$ →	
-1	2	$2 \mid n$ →	
i	4	$4 \mid n$	
$-i$	4	$4 \mid n$	
$1+i$	∞	$n=0$	
$(1+i)/\sqrt{2}$	HF 8	$8 \mid n$	
$\cos(\sqrt{2}\,360°) + i\sin(\sqrt{2}\,360°)$	HF ∞	$n=0$	
$\cos(336°) + i\sin 336°$	HF 15	$15 \mid n$	
z — Jó kitevők a rend többszörösei	z-nek hány kül. hatványa? esetén kitevők REND	$n=?$ $z^n=1$. Jó KITEVŐ	$\lvert z\rvert \neq 1$ → $\forall z$ hatvány kül. ; z szöge = irrac. $\cdot 360°$; z szöge $p/q \cdot 360°$, $(p,q)=1$ $\boxed{q}$ $\Rightarrow$ $o(z)=q$

$\frac{336}{360}$ $360°$ rac.

$1^1=1$, $1^2=1$, $1^3=1$ … $1^0=1$, $1^{-1}=1$, …

$(-1)^1=-1$, $(-1)^2=1$, $(-1)^3=-1$, …, $(-1)^0=1$, $(-1)^{-1}=-1$, …

$i^1=i$, $i^2=-1$, $i^3=-i$, $i^4=1$, $i^5=i$, $i^6=-1$, …, $i^0=1$

$i^{-1}=-i$.

$-i$ HF $(-i)^3=i$

$(1+i)^2 = 2i \qquad (1+i)^4 = -4, \ \ldots$

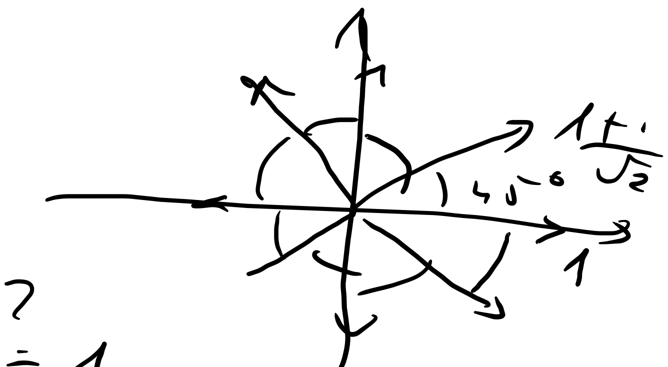
$\boxed{a \mid b \iff \exists k: \ b = ka}$

$(1+i) = \sqrt{2}\,(\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ)$

$|(1+i)^n| = |1+i|^n = \sqrt{2}^n \to \infty \quad n > 0$

$\phantom{|(1+i)^n| = |1+i|^n = \sqrt{2}^n} \to 0 \quad n < 0$

Párosnak kell. $\quad \sqrt{2}^0 = 1$, más nem.



$$\frac{1+i}{\sqrt{2}} = \cos 45^\circ + i \sin 45^\circ$$

$$\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^n = \cos n\cdot 45^\circ + i \sin n \cdot 45^\circ \overset{?}{=} 1 = \cos 0^\circ + i \sin 0^\circ$$

$0 \neq r(\cos\alpha + i\sin\alpha) = s(\cos\beta + i \sin\beta)$

$\iff r = s$ és $\exists k$ egész $\alpha - \beta = k \cdot 360^\circ$

$\exists k\ (n \cdot 45^\circ - 0^\circ = k \cdot 360^\circ) \qquad 45^\circ$-kal egysz.

$\exists k\ (n = 8k) \iff 8 \mid n$

$$\left(\cos(\sqrt{2}\,360^\circ) + i\sin(\sqrt{2}\,360^\circ)\right)^n = 1 = \cos 0^\circ + i\sin 0^\circ$$

$$\iff \exists k\,(n\sqrt{2}\,360^\circ - 0^\circ = k\cdot 360^\circ)$$

$$\iff \exists k\,(n\sqrt{2} = k) \iff n=0.$$

$$\overset{n\neq 0}{\iff} \underset{\text{irrac}}{\sqrt{2}} = \underset{\text{rac.}}{\frac{k}{n}} \lightning$$

$$\exists k\,(n\cdot 336^\circ - 0^\circ = k\cdot 360^\circ)$$

$$\exists k\,(n\,336 = k\cdot 360) \qquad /24$$

$$\exists k\,(14n = 15k)$$

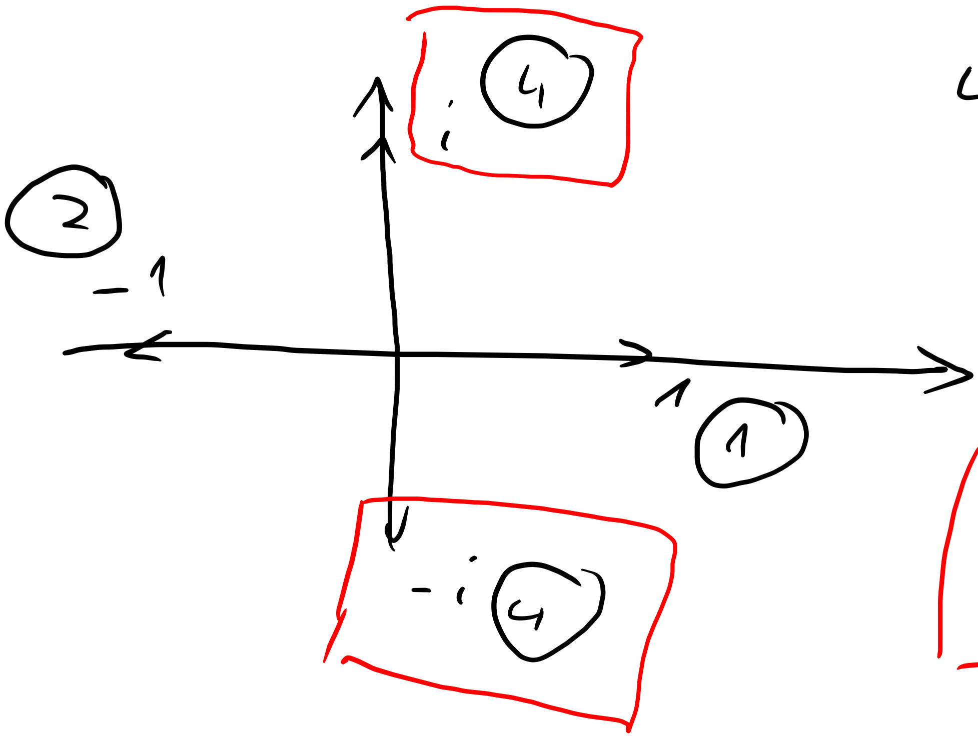
$$\iff 15 \mid 14n \Rightarrow 15 \mid n.$$

$$(15,14)=1$$

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} a \mid bc \\ (a,b) \end{array}\right\} \Rightarrow a \mid c}$$

---

z n. PRIMITÍV egységgyök $\iff o(z)=n.$



4. egységgyök $z^4=1$

$1,\ i,\ -1,\ -i$

rend

$\boxed{\text{4. primitív egységgyökök: rendje 4.}}$

$\varphi(4)=2$ db.

III/4 $\qquad o(\varepsilon)=512$

$q=512=2^9$

$\varepsilon = 1\left(\cos\left(\frac{p}{q}360^\circ\right)+i\sin\left(p/q\ 360^\circ\right)\right) \qquad (p,q)=1$

$\Rightarrow p$ ptlan

$-i\varepsilon = \left(\cos(-90^\circ)+i\sin(-90^\circ)\right)\cdot$

$-i\varepsilon$ szöge $\quad \frac{p\ 360^\circ}{512} - 90^\circ \quad / 360^\circ$ normált $= ?$

$$\frac{p}{512} - \frac{\cancel{90}}{\cancel{360}}{}_{1/4} = \boxed{\frac{p-128}{512}}$$

← ptlan

← 2-hatvány

$\Rightarrow o(-i\varepsilon)=512.$

n. egységgyökök $\sqrt[n]{1}$ értékei

$$\varepsilon_k = \cos\left(\frac{k}{n} 360^\circ\right) + i\sin\left(\frac{k}{n} 360^\circ\right)$$

$k = 1, \dots, n$ $\qquad \varepsilon_n = 1.$

$\varepsilon_k = \varepsilon_1^k.$

−1 ha n páros
1 ha n ptlan.

$\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_n = ?$ $\qquad \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n = ?$

$\varepsilon_1^n = 1$

$\varepsilon_1^2 + \dots + \varepsilon_n^2 = ?$

mértani sor

$\varepsilon_n^2 = 1$ $\qquad 1 + \varepsilon_1^2 + \dots + \varepsilon_{n-1}^2 = \dfrac{(\varepsilon_1^2)^n - 1}{\varepsilon_1^2 - 1} = \underline{\underline{0}}$ $\qquad \varepsilon_1^2 \neq 1$

$\varepsilon_1^2 = 1$ $\qquad \varepsilon_1 = 1 \quad n = 1$ $\qquad 1^2 = \underline{\underline{1}}$

van

$\varepsilon_1 = -1 \quad n = 2$ $\qquad 1^2 + (-1)^2 = \underline{\underline{2}}$

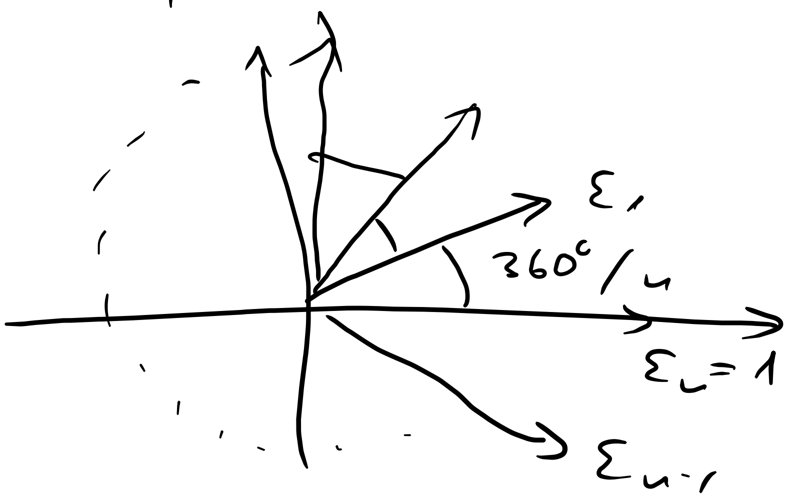
$\varepsilon \cdot \overline{\varepsilon} = |\varepsilon|^2 = 1$ $\qquad \overline{\varepsilon_k} = \varepsilon_{n-k}.$

párosítva sok db 1-es tényező $\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n$-ben.

ε párja saját maga: $\qquad \varepsilon = \overline{\varepsilon} \qquad \varepsilon \cdot \overline{\varepsilon} = 1$

$\Rightarrow$ $\varepsilon = 1$ van $\boxed{\varepsilon = -1}$ $\qquad -1$ n. egységgyök $\Leftrightarrow (-1)^n = 1$
$\Leftrightarrow$ n páros.

$\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_n = ?$



$n=1$ $\boxed{1}$

$n=2$ $1+(-1)=0.$

szab. n-szög.

összeg

$\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_n = 0$

súlypont "középpont"

szimmetrikus.

$360°/n$ -nel forgatás $=$ ε_1-gyel szorzás.

$$S = \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_n$$

$$\varepsilon_1 \cdot S = \varepsilon_1\cdot\varepsilon_1 + \varepsilon_1\cdot\varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_1\cdot\varepsilon_n =$$

$$= \varepsilon_1^2 + \varepsilon_1^3 + \dots + \underbrace{\varepsilon_1^n}_{=1} + \varepsilon_1^{n+1} = \varepsilon_1 = S$$

$$\varepsilon_1 \cdot S = S$$

$(\varepsilon_1 - 1) S = 0 \implies$ vagy $S = 0$

vagy $\varepsilon_1 = 1 \implies \underline{\underline{n=1}}.$