Bsc algebra3a gyakorlat

Első zárthelyi (2021. október 18.) — eredmények és pontozás

1. Tizedrendű elem csak $(abcde)(fg)(hk)$ lehet, a 10 hosszú ciklus ugyanis páratlan permutáció, az ötösciklus pedig páros, tehát két transzpozíció kell mellé (3 pont). Ezek száma $4!\binom{10}{5}3\binom{5}{4}$, hiszen egy négyelemű halmazon $\binom{4}{2}/2 = 3$-féle módon lehet elhelyezni két diszjunkt transzpozíciót (3 pont).

2. Mivel $240 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5$, ezért a felbontásban mindenképp szerepel a 3 és az 5. Ahhoz, hogy ne legyen 40 rendű elem, az szükséges és elégséges, hogy ne szerepeljen 4-nél nagyobb 2-hatvány. A megfelelő csoportok $(\mathbb{Z}_2^+)^4 \times \mathbb{Z}_3^+ \times \mathbb{Z}_5^+$, $(\mathbb{Z}_2^+)^2 \times \mathbb{Z}_4^+ \times \mathbb{Z}_3^+ \times \mathbb{Z}_5^+$ és $(\mathbb{Z}_4^+)^2 \times \mathbb{Z}_3^+ \times \mathbb{Z}_5^+$. Tehát 3 ilyen csoport van.

3. Összesen $4^3 = 64$ színezés van, ezek az identitás fixpontjai (1 pont). Egy 120 fokos forgatásnak egy színezés csak akkor lehet fixpontja, ha mindegyik él egyforma színű, ez 4 lehetőség (2 pont).Tengelyes tükrözésnél a szimmetrikusan elhelyezkedő élek színe egyforma kell, hogy legyen, a harmadik él pedig akármilyen lehet. Ez 4^2 lehetőség (2 pont). Ezért az eredmény $(64 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 16)/6 = 20$ (1 pont).

4. Ez a $Q \times A_3$ csoport, vagyis a keresett szám a 24. Valóban, ennek nyilván része a keresett H részcsoport, hiszen a második komponensben szorzással csak páros permutációk keletkezhetnek. Az $(i, (123))$ rendje $[4, 3] = 12$, de az általa generált részcsoportban nincs benne (j, id), mert j nem hatványa i-nek. Ezért H elemszáma 12-nél nagyobb, de osztója $|Q \times A_3| = 24$-nek, és így $H = Q \times A_3$.

5. A faktorcsoport rendje $\varphi(30)/2 = 4$ (1 pont). Mivel $17^2 \equiv (-13)^2 \equiv 19$ (30), de $17 \notin \{1, 19\}$, ezért $17\{1, 19\}$ rendje 2 (2 pont). A csoport többi elemét (praktikusan a ± 1, ± 7, ± 11 számokat) négyzetre emelve látjuk, hogy a faktorcsoport egységelemét kapjuk, ezért nincs ennél nagyobb rendű elem (3 pont). (A ± 11-et már nem is kellene négyzetre emelni, mert ha van két másodrendű elem, akkor a csoport már nem lehet ciklikus.)

6. A feladatban szereplő szakaszból háromféle van, hiszen három kitérő élpár létezik. Ezeken a tetraéder szimmetriacsoportja (ami S_4) tranzitívan hat. Ezért az orbit-stabilizátor tétel alapján a megfelelő szimmetriák száma $24/3 = 8$ (3 pont). A csoport D_4-gyel izomorf (indoklás nélkül 1 pont). Az indoklást megtehetjük az elemrendek vizsgálatával, ismerve az összes nyolcelemű csoportot, vagy egy negyedrendű f és egy másodrendű t transzformáció megadásával, amelyek teljesítik a diédercsoportban megkívánt $tf = f^{-1}t$ összefüggést. A legegyszerűbb indoklás azonban geometriai. Jelölje AB, illetve CD a tetraédernek azt a kitérő élpárját, amelyek F, illetve G felezőpontjait összekötő szakaszt fixálja a csoport. Ekkor az FG szakasz felezőmerőleges S síkját a csoport elemei fixen hagyják. Erre az S síkra merőlegesen levetítve az AB és CD szakaszokat egy négyzet két átlóját kapjuk. A csoport elemei ezen a négyzeten hatnak, mindegyik másképp, hiszen identikusan csak az identitás hathat (2 pont). Ezt a négyzetet úgy is megkaphatjuk, hogy a tetraédert befogadó kockát elmetsszük az S síkkal (derékmagasságban). Negyedik megoldásként azt is be lehet bizonyítani, hogy S_4 mindegyik 8 elemű részcsoportja D_4-gyel izomorf.