M és N hasonlók $\Leftrightarrow$

$$S^{-1}MS = N$$

$$\underbrace{S^{-1}(M-\lambda E)S} = \underbrace{S^{-1}MS}_{N} - S^{-1}\lambda E S$$

$$S^{-1}\lambda E S = \lambda S^{-1}ES = \lambda S^{-1}S = \lambda E$$

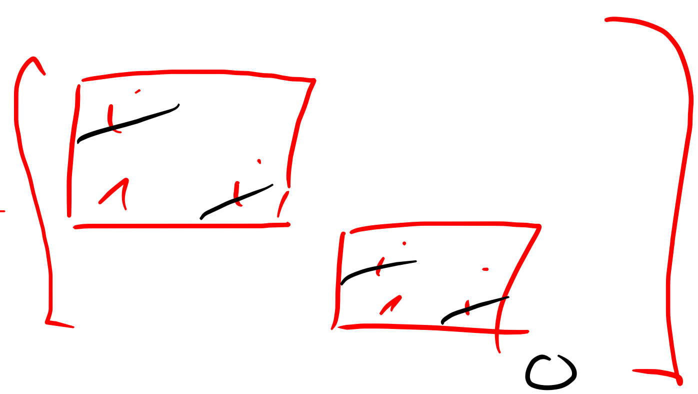
$M-\lambda E$ hasonló $N-\lambda E$ -hez.

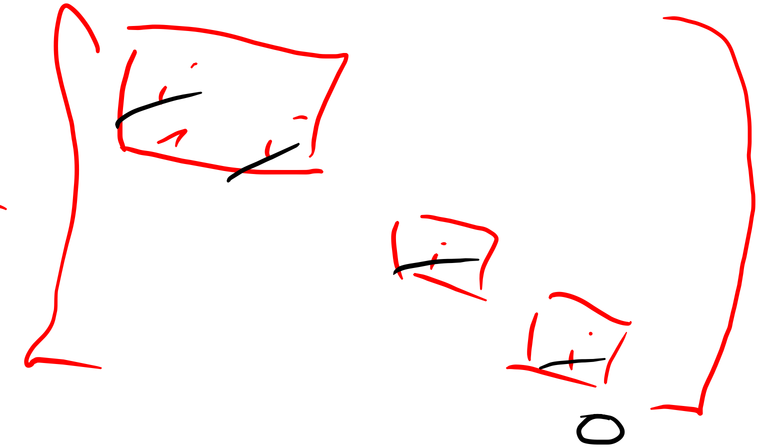
Rang ugyanaz!

$$M_1 = \begin{bmatrix} \cancel{i} & 0 & 0 & i \\ 0 & \cancel{i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cancel{i} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cancel{i} \end{bmatrix} \qquad M_2 = \begin{bmatrix} \cancel{i} & i & 0 & i \\ 0 & \cancel{i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cancel{i} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cancel{i} \end{bmatrix}$$

$M_1 - iE$ $\quad \nu = 1$

$M_2 - iE$ $\quad \nu = 2$

$N_1 =$ 

$N_2 =$ 

$N_1 - iE$ $\quad\quad\quad\quad$ $N_2 - iE$

$\nu = 2$ $\quad\quad\quad\quad$ $\nu = 1$

hasonló $N_2 - iE$ $\quad\quad\quad\quad$ $N_1 - iE$

lelet vd $\quad\quad\quad\quad$ lelet vd.

9/4 $\quad x + y + u - v = 0$

$(4,3,2,1)$ távolsága

normálvektor $(1,1,1,-1)$ normálva

$\left| \left\langle \tfrac{1}{2}(1,1,1,-1), (4,3,2,1) \right\rangle \right| =$

$= \tfrac{1}{2}\, 8 = 4 \leftarrow$ távolság. ✓

$$A\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A(e_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad A(e_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad A(e_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad A(e_4) = 0$$

$$\begin{array}{c|cccc} & A(e_1) & A(e_2) & A(e_3) & A(e_4) \\ \hline e_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ e_2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ e_3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ e_4 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} = M$$

normális: $MM^* \overset{?}{=} M^*M$ NEM (HF számolni)

önadjungált: $M^* \overset{?}{=} M$ NEM

unitér: $M^* \overset{?}{=} M^{-1}$ NEM.

$\Leftrightarrow$ $\boxed{M^* \cdot M \overset{?}{=} E}$

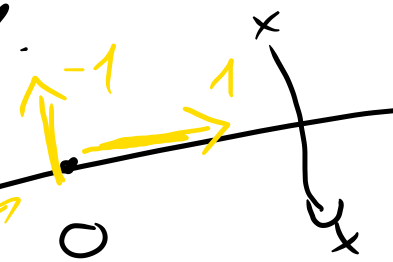
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = M^*$$

M^{-1} nem $\exists$, det $= 0$ (főátló, ∇-mátrix)

4x4-es Jordan-blokk $\Rightarrow$ semmiféle bázisban sem diag-ható!

$\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$ pl.

szimm IGEN



tükör

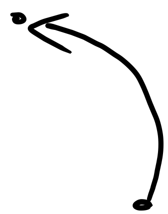
IGEN

ONB sajátvektor-e ✓

IGEN

$\begin{bmatrix}0&-1\\1&0\end{bmatrix}$ pl.

nem szimm



forg

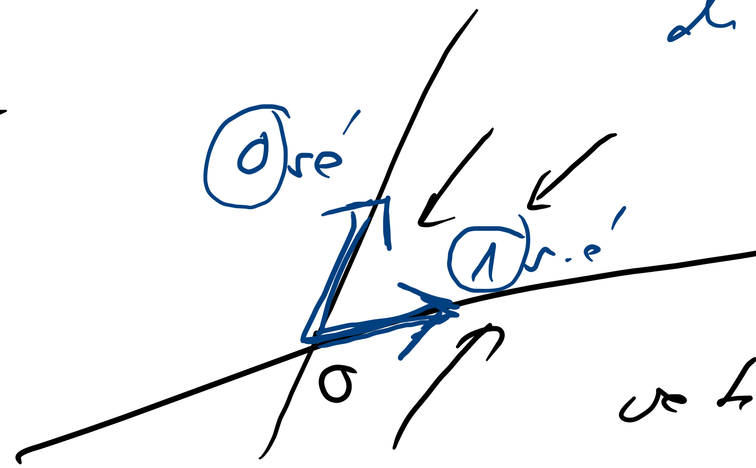
O

valósban nem diag. Kivéve: 180°, 0°. Az igen

diag alak

$\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}$

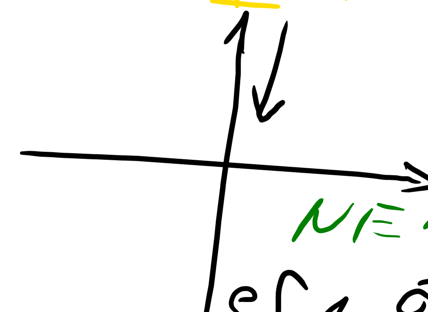
szimm



vetítés

NEM

valós szimm $\Longleftrightarrow$ $\perp$ vetítés.



NEM

szimm?

$M^T = M^* = M$

$\Longleftrightarrow$

valós ONB-ben diag-ható (főtengely-tétel).

ortogonális?

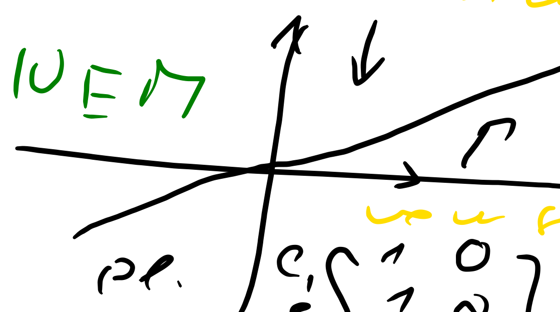
$M^* M = E$

$\Longleftrightarrow$ egybevágóság

pl. $\begin{array}{c c}e_1\\e_2\end{array}\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}$

szimm

NEM



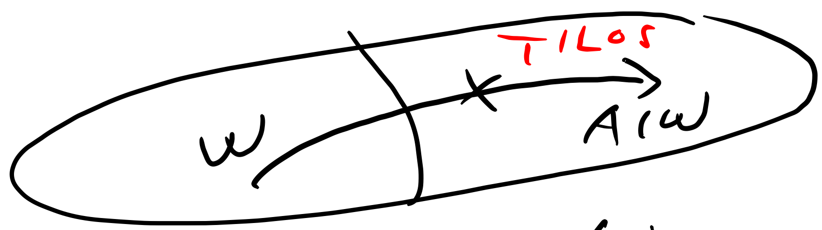
nem szimm

pl. $\begin{array}{c}e_1\\e_2\end{array}\begin{bmatrix}1&0\\1&0\end{bmatrix}$.

Egybevágóság   Szimm

Inv. altér.

{0}, egész tér invariáns ∀ A-ra.

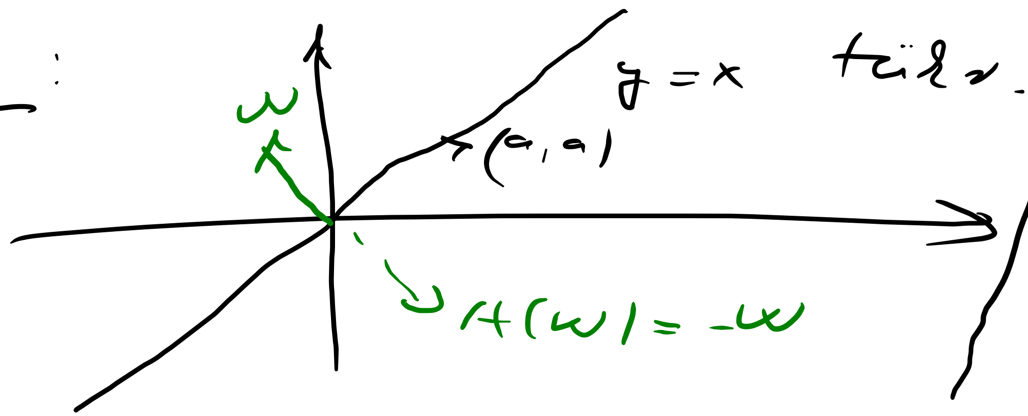


$A \in \mathrm{Hom}(V)$

W altér

A-invariáns: $w \in W \Rightarrow A(w) \in W$.

Példák:



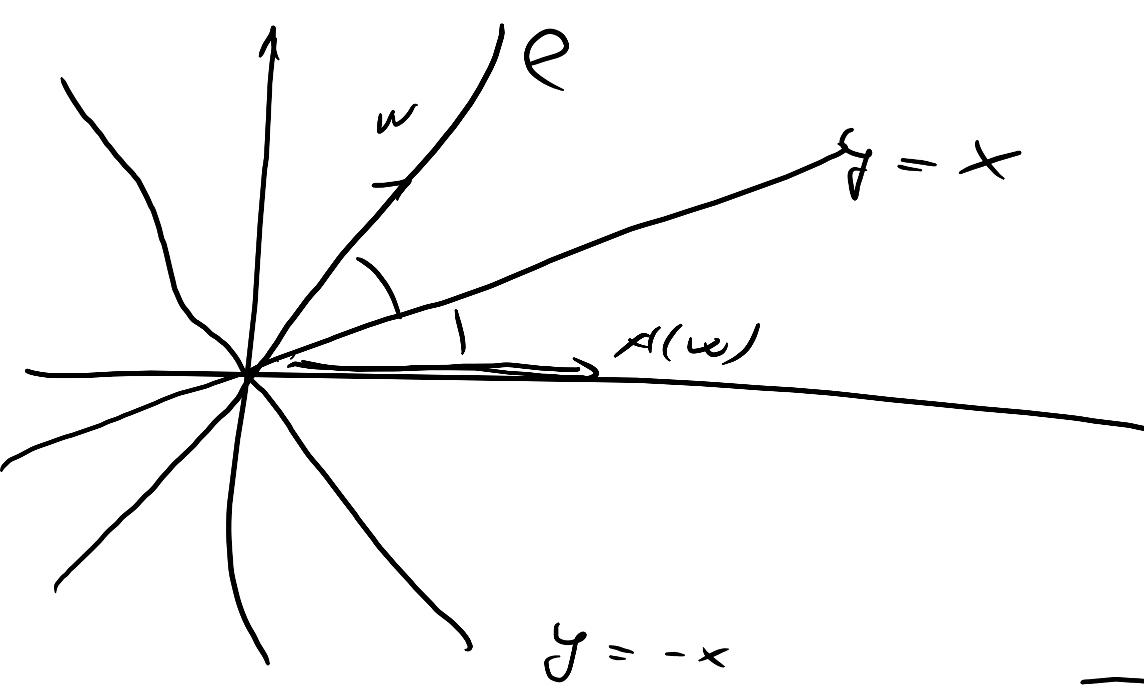
Az egész tér ✓
w bármi
$\Rightarrow A(w) \in$ egész tér ✓

$y = -x$ a másik
$A(w) = -w \in y = -x$. ✓

Két altér: {0}, tér, egyenes 0-n át.

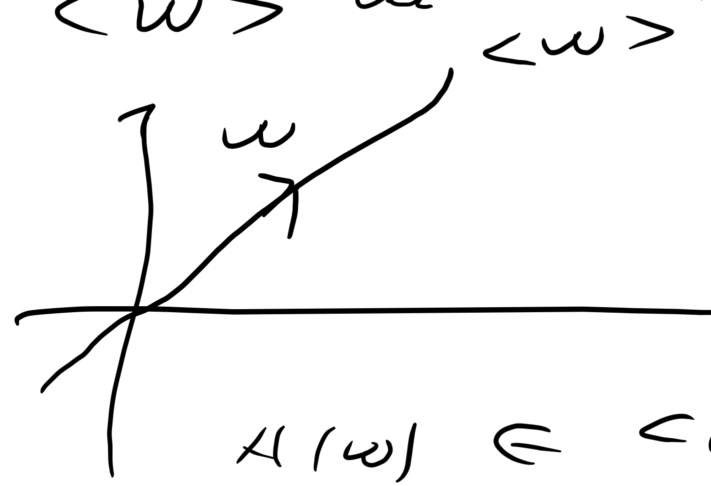
Melyik invariáns? {0} jó $w \in \{0\} \Rightarrow w = 0$
$\Rightarrow A(w) = A(0) = 0 \in \{0\}$ ✓

$y = x$ jó $w = \binom{a}{a}$ $A(w) = \binom{a}{a}$ ✓ $\in$ $y = x$ egyenes.



$w = 0$

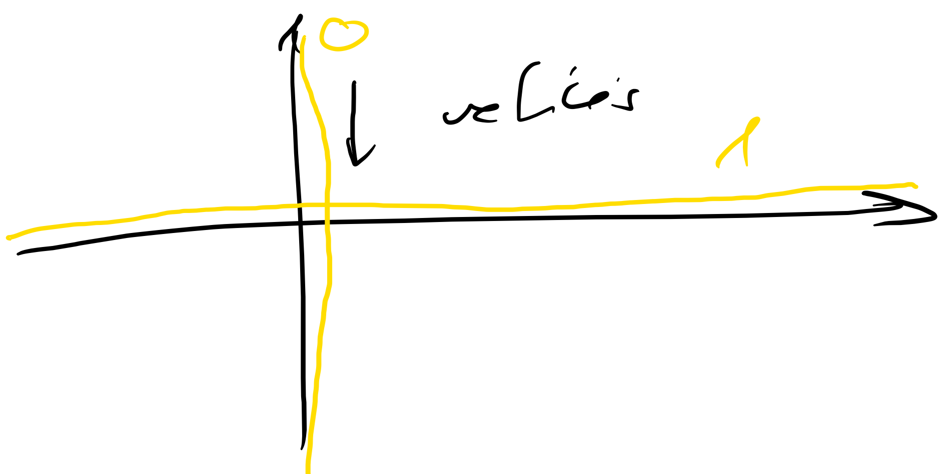
$\langle w \rangle$ mikor inv?



$A(w) \in \langle w \rangle$
$= \lambda w$

$\Longleftrightarrow$ w sajátvektor!

1-dim inv altér $\Longleftrightarrow$ sajátvek.



2 1-dim sajátaltér van.

Térben?

Egyenes körüli forgatás? 90°

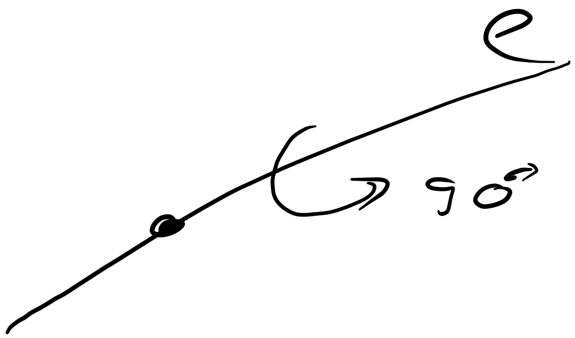
90 |, forg jó ← triviális invariáns

egyenesek? tengely jó már

sík? ⊥ e-re sík.

nem sajátaltér!

sajátaltér $\lambda = 1$



$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & \\ & \boxed{F} \end{bmatrix}$$

90° forg mátrix.

$A(f) = f'$

$V = \leq 3.$ fokúak

$\{0\}$, egyért.

$\leq 2.$ fokúak jó! ← $ux^2 + vx + w$

$\leq 1.$ fokú jó! ← $ax + b$

$\leq$ konstans jó ← c

NINCS.

Van-e más?

W inv. altér $f \in W$

$\Rightarrow f' \in W \Rightarrow f'' \in W \Rightarrow f''' \in W \Rightarrow f^{(4)} \in W \ldots$

Ha $\mathrm{gr}(f) = 2 \Rightarrow \mathrm{gr}(f') = 1 \Rightarrow \mathrm{gr}(f'') = 0$ és $f''' = 0$.

$\langle f, f', f'' \rangle$ ← 3 dim, altere a ≤ 2 fokúak terének

F pontosan két fokú

$\Rightarrow$ egyért.

(valódi altere dim.)

diag-hatóság

ONB

ℝ: szimm

ℂ: normális

tetszőleges bázisban

$k(x)$ gyökeinek a multiplicitását ← alg. mult.

és ∀ sajátaltér dim

→ kijön a sajátvektorok lin. egyenletrendszeréből. Rang/dim tétellel dim-ja a szabad változók száma.

→ geom. mult.

diag ⟺ ∀ s.é. alg. mult = geo. mult. („van elég sajátvektor").

→ Másképp: ℂ felett min. pol ∀ gyöke egyszeres ⟺ diag-ható.

ℝ felett min. pol ∀ gyöke egyszeres és min. pol ∀ komplex gyöke valós.

[A Jordan-alakban ∀ (blokk) 1×1-es.]