5/1 $f \mapsto f$ konst. tagja. } IGEN

5/2 $f \mapsto f$-ben x együtthatója

Olyan $\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \to a_2$ is hivatkozás.

5/3 $f \mapsto$ főegyüttható NEM.

$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \to$ felülről első $\neq 0$ komponens.

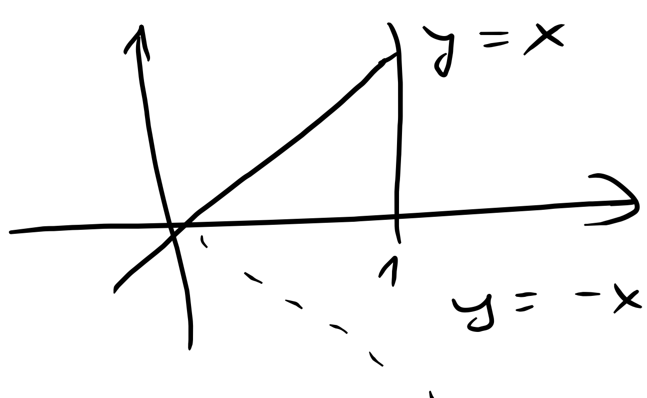
(vön já)

$$A\left((x^2+1) + (-x^2+x+1)\right) \overset{?}{=} A(x^2+1) + A(-x^2+1)$$

$$A(x+1) = \underbrace{1} \neq \underbrace{\overset{1}{\shortparallel} \quad \overset{-1}{\shortparallel}}_{0}$$

5/4. $f \mapsto \max\limits_{x \in [0,1]} f(x)$

λ-szoros. $\lambda > 0$: igen



max 1

$-x$ max 0

$A(-x) = -A(x)$

$0 \neq -1$.

5/5 A uncuaz

$$A(x + (1-x)) \overset{?}{=} A(x) + A(1-x)$$

$$\underset{\substack{\shortparallel \\ 1}}{A(1)} \neq 1 + \underset{\substack{\shortparallel \\ 1}}{}$$

5/6 $\underset{2\times 2}{M} \xrightarrow{A} M + 2M^T$ első sacícd ösrege.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$3 \qquad 1 \qquad 2 \qquad 0$$

$$1\,(\,3 \quad 1 \quad 2 \quad 0\,)$$

5/7 x-tengely fix, az $A((1,0)) = (1,0)$

$\det A = ?$ $A((1,2)) = (3,4)$

$\underline{(1,0)}$ $\underline{(3,4)}$

$$\begin{array}{c} (1,0) \\ (1,2) \end{array} \begin{pmatrix} \begin{array}{cc} (1,0) & (1,2) \\ 1 & \alpha \\ 0 & \beta \end{array} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$\alpha(1,0) + \beta(1,2) = (3,4)$

$(\underbrace{\alpha+\beta}_{3}, \underbrace{2\beta}_{4}) \Rightarrow \beta = 2$

$\Rightarrow \alpha = 1$

$\Rightarrow \det = \boxed{2}$.

5/8 2 megoldás!

1. gyalogos $y = x$-re tükr

$$\begin{array}{c} (1,0) \\ (0,1) \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = [T]_{((1,0),(0,1))}$$

(x,y) képe (y,x).

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$$

Bázis $(1,3)$, $(2,7)$

$\downarrow \quad \downarrow$

$(3,1) \quad (7,2)$

$$\begin{array}{c} (1,3) \\ (2,7) \end{array} \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 19 & 45 \\ -8 & -19 \end{bmatrix}$$

$\alpha(1,3) + \beta(2,7) = (3,1)$

$\gamma(1,3) + \delta(2,7) = (7,2)$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 7 & 1 \\ \alpha & \beta & \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -8 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 19 \\ 0 & 1 & -8 \end{array}\right]$$

$\alpha = 19, \ \beta = -8.$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 7 \\ 3 & 7 & 2 \\ \gamma & \delta & \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & -19 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 45 \\ 0 & 1 & -19 \end{array}\right]$$

$\gamma = 45 \quad \delta = -19$

II. mo Bázistr. fő. $\quad S^{-1} M S \quad M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$S = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$ áttérési mátrix

új bázis a régiben

Régi: $(1,0)$ $(0,1)$

$(1,3) = 1 \cdot (1,0) + 3(0,1)$

$S^{-1} = \dfrac{1}{1 \cdot 7 - 3 \cdot 2} \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$

főátló csere, mellékátló $\ominus$.

$S^{-1} M S$

Műveletek leképezések között.

státus = kompozíció

$(A+B)(v) = A(v) + B(v)$ pontonként

$(\lambda A)(v) = \lambda (A(v))$ — " —

→ nem a λ-val nyújtás!

↳ $A(\lambda v) = \lambda(A(v))$

Ha számolni kell: MÁTRIXOKKAL! (nem mindig)

III/6 T $y=x$ tükr. F $+90°$ forg.

$X: (x,y) \to (x,0)$ $Y: (x,y) \mapsto (0,y)$ lineárisak

$(F+T)((x,y)) = ?$ → $(0,2x)$

↙ mátrixos bázisban

$[(F+T)((x,y))] = [F+T][(x,y)]$

$\left([F] + [T]\right)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 0 \\ 2x \end{bmatrix}}}$

mert $[(0,2x)] = \begin{pmatrix} 0 \\ 2x \end{pmatrix}$

$X+Y$ melyik trafó?

$[X] = \begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}$ $\qquad [Y] = \begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$

$[X+Y] = \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix} = \begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$

$(X+Y)(x,y) = ?$ $\qquad \begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

(x,y)

$\Rightarrow$ $X+Y$ a helybenhagyás (id).

$= I$.

XY HF.

F^{1867} $\qquad [F] = \begin{bmatrix}0&-1\\1&0\end{bmatrix} \Rightarrow [F^{1867}] = \begin{bmatrix}0&-1\\1&0\end{bmatrix}^{1867}$

egyszerűbb elképzeléssel! $\qquad F^4 = I$ $\qquad$ 4-gyel periodikus

$1867 \bmod 4 = 3$.

$F^{1867} = F^3 = F^{-1}$ $\quad -90^\circ$ forgatás. ✓

HF $\quad T^{1867} = ?$

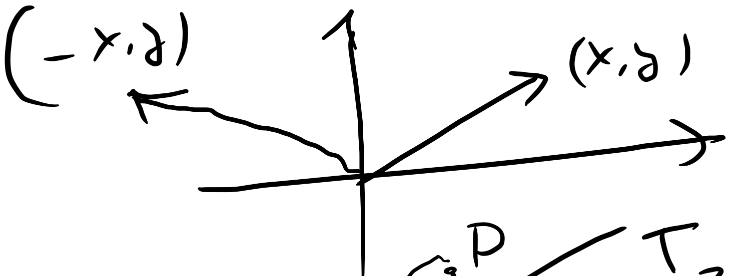
$FT,\ TF = ?$ $\qquad \# \ TF = ?$

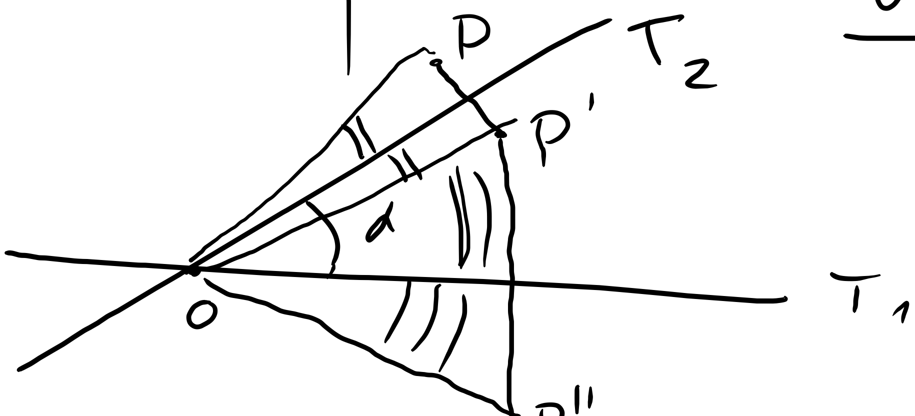
$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$$

$FT: (x,y) \to (-x,y)$

y-tengelyre tükrözés.





Geometriailag:

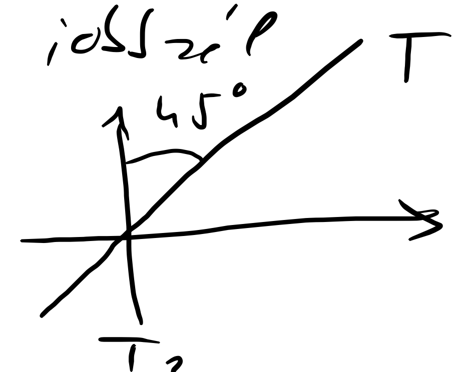
$T_1 T_2 (P) = P''$

2α szögű forg. O körül.

$FT \overset{?}{=} T_3 \leftarrow$ y-tengelyre tükr.

$\Updownarrow \qquad / \ T$ jobbról

$F \overset{?}{=} FTT = \underbrace{T_3 T}_{2 \cdot 45^\circ = 90^\circ \checkmark}$



$\textcircled{F}$-e $\quad T \quad F \quad FT \quad TF$

$$\left(\lambda_1 T + \lambda_2 F + \lambda_3 FT + \lambda_4 TF = 0\right)$$

→ Mátrixokra átírni

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \ldots$$

↓ standard bázisban $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \ldots$

$$\begin{bmatrix} 0 & \\ 1 & \\ 1 & \ldots \\ 0 & \end{bmatrix}$$

(d) $\langle F, F^2, F^3, \ldots, F^{2000}, \ldots \rangle$ dim = ?

$\underbrace{F, F^2, F^3}_{\text{periodikus}}$, nem ∞ sok, hanem

$F^5 = F$, $F^6 = F^2$, $\ldots$ $\quad \langle F, F^2, F^3, F^4 \rangle$ rang.

$$\langle F, F^2, F^3, F^4 \rangle = \underline{\underline{\langle F, F^2 \rangle}}$$

F, F^3 F

$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

F^2 tükr.

$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -E$

$F^4 = E$

$\forall F \quad [F^3) = -(F] \quad \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

$F^3 = -F$

$\boxed{\text{rang} = 2}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 2 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + 6z \\ 2x + 5z \\ 3x \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Képtér, magtér, rang

Magtér: ami 0-ba megy

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 6 & 0 \\ 2 & 0 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ x & y & z & \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & -18 & 0 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \\ \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \end{array}$$

y szabad

$x = z = 0$

Megoldás: $\begin{bmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{bmatrix}$

dim 1

Áll dim = szabad változó száma.

Képtér dim = ? rang = mátrix rangja =

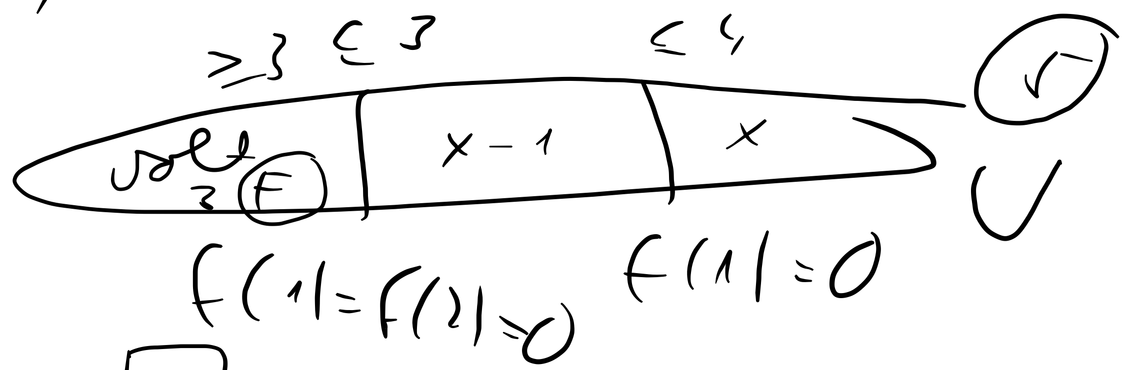
= kötött száma $= \boxed{2}$

Dim-tétel: $\dim \mathrm{Ker} + \dim \mathrm{Im} = \dim V$

szabad vált — kötött vált száma — összes vált. száma.

gr $f \leq 4$ 5-dim. $\mathbb{R}$ fölött

A ≠ 0, alt $f(1) = f(2) = 0$



$\boxed{3}$.

III. mo. dim. tétel

$A : V \to \mathbb{R}^2$

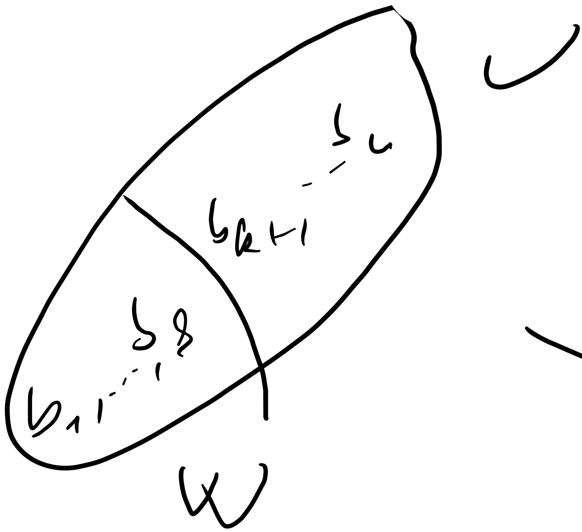
$A(f) = \begin{bmatrix} f(1) \\ f(2) \end{bmatrix}$ lin. leképezés.

$f(1) = f(2) = 0$: pont A magtere!

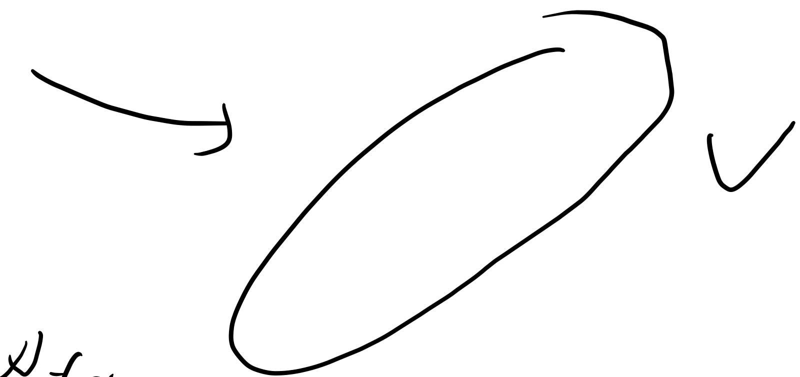
dim-tétel $\operatorname{Ker} A$ dim-ja $= 5 - \dim \operatorname{Im} A$

$\operatorname{Im}(A)$ az egész $\mathbb{R}^2$.

$\exists\, 2$ f $f(x) = x$ $A(f) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ | $f(x) = x - 1$ $A(f) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$



A való-e : $\mathrm{Ker}\,A = W$.



$b_1, \dots, b_k$ bázis W-ben.

$b_1, \dots, b_k, b_{k+1}, \dots, b_n$ bázis V-ben.

Előírhatósági tétel

$\Rightarrow \exists!\, A$, és ez jó.

$$\begin{array}{cccc} b_1, \dots, & b_k, & b_{k+1}, \dots, & b_n \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 0 & 0 & b_{k+1} & \dots\ b_n \end{array}$$

$$\mathrm{Ker}\,A \ni v = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n$$

$$0 \qquad \downarrow A$$

$$\lambda_{k+1} \underbrace{b_{k+1} + \dots + \lambda_n b_n}_{F} = 0 \quad (v \in \mathrm{Ker}\,A)$$

$$\Rightarrow \lambda_{k+1} = \dots = \lambda_n = 0$$

$\Rightarrow v = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_k b_k$

$\to$ pont a W elemei.