$\forall \lambda_1 \ldots \lambda_n$

(F) $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n = 0$

$$\Longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0.$$

Kiszámítása: Gauss-elimináció.

1.
$$\lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \lambda_3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_3 \\ \lambda_2 \end{bmatrix}$$

$\lambda_1 = 0$
$\lambda_2 = 0$
$\lambda_3 = 0$
$\Longrightarrow$ (F).

$$\lambda_1 \overset{v_1}{\begin{bmatrix}1\\4\\7\end{bmatrix}} + \lambda_2 \overset{v_2}{\begin{bmatrix}2\\5\\8\end{bmatrix}} + \lambda_3 \overset{v_3}{\begin{bmatrix}3\\6\\9\end{bmatrix}} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$1 \qquad -2 \qquad 1 \qquad \text{ÖF}$

$$v_2 = \frac{v_1 + v_3}{2}$$

Ezeket mátrix

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 &= 0 \\ 4\lambda_1 + 5\lambda_2 + 6\lambda_3 &= 0 \\ 7\lambda_1 + 8\lambda_2 + 9\lambda_3 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

kötött

szabad

$$\begin{array}{ccc} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & 0 \\ 0 & -6 & -12 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{array}\right]$$

STOP

0-sort sosem kell kiírni

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 - \lambda_3 &= 0 \\ \lambda_2 + 2\lambda_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} \lambda_1 &= \lambda_3 \\ \lambda_2 &= -2\lambda_3 \end{aligned}$$

$$\underline{\underline{(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (\lambda_3, -2\lambda_3, \lambda_3)}}.$$

Pl.

$\lambda_3 = 1$

$\lambda_1 = 1$ jó

$\lambda_2 = -2$

$\exists$ szabad $\Rightarrow$ ÖF

$$0\cdot\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} + 0\cdot\begin{bmatrix}6\\5\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} \quad \text{ÖF}$$

$$1\begin{bmatrix}1\\1\\3\end{bmatrix} + 0\cdot\begin{bmatrix}2\\1\\2\end{bmatrix} + (-1)\begin{bmatrix}1\\1\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} \quad \text{ÖF}$$

Ha van közötte 0-vektor, akkor ÖF

Ha van két egyforma, akkor ÖF

$\{x, \; 2x, \; x^2\}$ ⇒ ÖF

$\;\;2 \quad -1 \quad 0$

$v_1 = \lambda v_2$ és v_1, v_2 közötte van ⇒ ÖF

$\boxed{2}$ vektor mikor F ?

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = 0$$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Ha } \lambda_1 \neq 0 & \Rightarrow \; v_1 = -\lambda_2/\lambda_1 \, v_2 \\ \text{Ha } \lambda_2 \neq 0 & \Rightarrow \; v_2 = -\lambda_1/\lambda_2 \, v_1 \end{array}\right\}$$

v_1 és v_2 ÖF $\iff$ VAN OLYAN, ami a másik skalárszorosa.

NEM IGAZ, hogy mindegyik a másik skalárszorosa.

$v \neq 0$ $\quad \{v, 0\}$ ÖF

$0 = 0 \cdot v$ de $v \neq \lambda \cdot 0$.

Ha v_1 és v_2 sem 0 $\iff$

ÖF $\iff$ mindegyik a másik skalárszorosa.

HF az előző két mátrix. $\quad$ te. h. $= 0$.

$\downarrow$

Opdi[illegible]

$$\lambda_1(1+x) + \lambda_2(1+x^2) + \lambda_3(x+x^2) = 0$$

Rendezzük x hatványai szerint!

$$\underbrace{(\lambda_1 + \lambda_2)}_{0} 1 + \underbrace{(\lambda_1 + \lambda_3)}_{0} x + \underbrace{(\lambda_2 + \lambda_3)}_{0} x^2 = 0$$

$\overset{HF}{\Longrightarrow}$ $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ $\quad$ F

$$\lambda_1(1+x)+\lambda_2(2+x)+\lambda_3(3+x)=0$$

$$\left.\begin{array}{ll} 1: & \lambda_1+2\lambda_2+3\lambda_3=0 \\ x: & \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0 \end{array}\right\}$$

x^2 : nincs már

Tétel szerint (Alg 1-ben)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(kevesebb egyenlet, mint ismeretlen)

max 2 rang (2 sor van)

$\Rightarrow \exists$ oszlop, ahol nincs

$\Rightarrow \exists$ szabad változó $\Rightarrow$ ÖF

$\{x, 2x, x^2, x^3\}$.

egymás skalárszorosai $\Rightarrow$ ÖF

$x \parallel 2x$ (párhuzamos)

$1+i \qquad 2+i \qquad 3+i$

$\lambda_1(1+i) + \lambda_2(2+i) + \lambda_3(3+i) = 0$ $\quad$ ℝ fölött

$$\left.\begin{aligned} \text{Re}: \quad & \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \\ \text{Im}: \quad & \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{aligned}\right\}$$

ugyanaz, mint az előbb $\quad$ 3/(c) LF

Tetszőleges 3 komplex szám $\quad$ ÖF

$1+i \qquad 2+i$ $\quad$ F ? $\quad$ ℝ felett $\quad$ F

$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\quad$ LF

nem $\parallel$

ℂ fölött ?

$\in \mathbb{C}$

$(1+i) = \dfrac{1+i}{2+i}(2+i)$

ÖF

2 (3)

$$\{v_1, v_2, v_3\}\ F \overset{?}{\Longrightarrow} \{v_1 - 3v_2, v_2, v_3\}\ F$$

$$\lambda_1(v_1 - 3v_2) + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0$$

$$\parallel$$

$$(\lambda_1)v_1 + (\lambda_2 - 3\lambda_1)v_2 + (\lambda_3)v_3$$

$$v_1, v_2, v_3\ F \Longrightarrow \lambda_1 = 0,\ \lambda_3 = 0\ \ \lambda_2 - 3\lambda_1 = 0$$

$$\lambda_2 = 0\ \checkmark$$

$M \in T^{n \times n}$ $\quad \det M = 0 \iff$ oszlopai ÖF

$\iff$ sorai ÖF

[illegible]

4. csupa Külön fokú polinom F

$$\cancel{3x^{17} + 5x^{8} + 6x^{4} + 7x - 1} \qquad \lambda_1$$
$$+$$
$$7x^{8} + 6x^{6} + 3x - 2 \qquad \lambda_2$$
$$+$$
$$5x^{6} + 2x + 8 \qquad \lambda_3 \quad = 0.$$

A legnagyobb fokúban $\lambda_1 = 0$ mert x^{17} nem esne ki!

Ugyanúgy $7x^8$-nál stb.

6. elé: 1 és $\sqrt{2}$ F-e $\mathbb{Q}$ fölött?

$$a + b\sqrt{2} = 0 \qquad a, b \in \mathbb{Q}$$

$$\Rightarrow \underset{\text{irrac.}}{\sqrt{2}} = \underset{\text{rac.}}{-a/b} \text{ ha. vagy } b = 0 \qquad F.$$

Azaz $b = 0 \Rightarrow a = 0$