VI/9, 14

$\mathbb{G}$ Gauss-egészek

$G/(5) \cong \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5$ $\quad \varphi: \mathbb{G} \to \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5$

$a+bi \mapsto (a+bi \bmod 2+i,\ a+bi \bmod 2-i)$

(van maradékos osztás.)

$G/(2+i) \cong \mathbb{Z}_5$ miért?

$G/(3) \cong \mathbb{Z}_3[x]/(x^2+1)$

$5 = (2+i)(2-i)$ 5 nem prím $\mathbb{G}$-ben.

($4k+1$ alakú is felbomlik)

$\to$ 3 prím $\mathbb{G}$-ben $\Rightarrow$ test lesz. 9 elemű test

$\to$ $3 = (a+bi)(c+di)$ kai

$$\frac{\begin{aligned} 3 &= (a+bi)(c+di) \\ \cdot\ 3 &= (a-bi)(c-di) \end{aligned}}{9 = (a^2+b^2)(c^2+d^2)}$$

$a^2+b^2 = c^2+d^2 = 3$ $\lightning$ $\quad a^2+b^2$: $0, 1, 2, 4, \ldots$

$a^2+b^2 = 1$ és $c^2+d^2 = 9$

$\Rightarrow a+bi = \pm 1, \pm i$ EGYSÉG.

14 $R \ni 1$ $1-ab$ inv-ható
$\Rightarrow 1-ba$ inv-ható.

$$1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots = \frac{1}{1-x} \quad \text{ő motiváció}$$

$$\frac{1}{1-ba} = 1 + ba + (ba)^2 + \dots =$$

"baba"

lineáris kezdet

$$= 1 + b\underbrace{(1 + ab + (ab)^2 + \dots)}_{\frac{1}{1-ab} = r}a = \boxed{1 + bra}$$

$r(1-ab) = 0$

$r = rab =$

$= ab\,r$

Precíz m.o.

Legyen $r = (1-ab)^{-1}$. Belátjuk, hogy

$(1-ba)^{-1} = 1 + bra$ (Első oldali)

$$(1+bra)(1-ba) = 1 + bra - ba - braba =$$

$$= 1 + b(\underbrace{r - 1 - rab}_{=0})a$$

$$\frac{1}{2+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}} = a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4}$$

$$1 = 2a + 2b\sqrt[3]{2} + 2c\sqrt[3]{4} +$$
$$+ \sqrt[3]{2}\,a + \sqrt[3]{4}\,b + 2c +$$
$$+ \sqrt[3]{4}\,a + 2b + 2\sqrt[3]{2}\,c =$$
$$= \overbrace{(2a+2c+2b)}^{=1} +$$
$$+ \sqrt[3]{2}\underbrace{(2b + a + 2c)}_{=0} +$$
$$+ \sqrt[3]{4}\underbrace{(2c + b + a)}_{=0}$$

$1, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4}$ bázis
felírás egyért.

lin egyenletrendszer a, b, c-re.

$1 - 1/2\sqrt[3]{4}$ lin HF.

Θ x^3+3x+1 gyöke.   irred, mert 3. fokú, nincs rac. gyöke

p/q $p \mid 1$, $q \mid 1$, ± 1 nem.

$\Theta^5 + 2\Theta^3 = ?$ $\Theta/(\Theta-3) = ?$

$\Theta^3 + 3\Theta + 1 = 0 \Rightarrow \boxed{\Theta^3 = -3\Theta - 1}$

$\Theta^5 = -3\Theta^3 - \Theta^2$

$2(\cancel{-3\Theta-1}) + -3\Theta^3 - \Theta^2 =$

Θ^3

$= -\Theta^3 - \Theta^2 = \underline{\underline{3\Theta + 1 - \Theta^2}}$

mindig a legnagyobb Θ-hatványt tüntetjük el.

$\Theta/(\Theta-3) = a + b\Theta + c\Theta^2$

$\Theta = (\Theta-3)(a + b\Theta + c\Theta^2) =$

$= a\Theta + b\Theta^2 + c\underbrace{\Theta^3}_{(-3\Theta-1)} - 3a - 3b\Theta - 3c\Theta^2$

$= (\underbrace{-c-3a}_{=0}) + \Theta(\underbrace{a-3c-3b}_{=1}) + \Theta^2(\underbrace{b-3c}_{=0})$

$$\boxed{\begin{aligned} a &= 1/37 \\ b &= -9/37 \\ c &= -3/37 \end{aligned}}$$

VII/5. π min. pol: N/NCS
(transcendens)

$1+i = x \to i = x-1 \to i^2 = (x-1)^2$

$\to -1 = x^2 - 2x + 1 \to \boxed{x^2-2x+2=0}$

gyöke $1+i$

irred? ✓ Sch-E $p=2$. ez a min. pol.

$x = 1 + \sqrt[3]{2}$ $\quad \sqrt[3]{2} \quad x^3 - 2$ Sch-E.

eltolt

$x - 1 = \sqrt[3]{2}$

$(x-1)^3 = 2$ $\quad x^3 - 3x^2 + 3x - 3 = 0$ $\quad p=3$ Sch-E

$f(x) = (x-1)^3 - 2$ $\quad$ irred, mert irred eltoltja

$[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}+1) \Rightarrow \sqrt[3]{2}$ és $\sqrt[3]{2}+1$ foka egyenlő

$\Rightarrow \sqrt[3]{2}+1$ is 3. fokú $\Rightarrow$ ha egy 3. fokú normált gyöke, akkor az a min. pol.$]$

$\sqrt[3]{2+\sqrt{2}} = x$ ← fola 6

$\sqrt{2} + i = x$

$\sqrt{2} + \sqrt{3} = x$

$2 + \sqrt{2} = x^3$

$x^3 - 2 = \sqrt{2}$

$(x^3 - 2)^2 = 2$

$x^6 - 4x^3 + 4 = 2$

$\boxed{x^6 - 4x^3 + 2} = 0$

Sch-E $p = 2$.

$\sqrt{2} = x - i$

$2 = (x-i)^2 = x^2 - 2ix - 1$

$x^2 - 2ix - 3 = 0$

$x^2 - 3 = 2ix$

$(x^2 - 3)^2 = -4x^2$

$x^4 - 6x^2 + 9 = -4x^2$

$\boxed{x^4 - 2x^2 + 9} = 0$

ired ???

$\sqrt{2} + \sqrt{3} = x$

$3 = (x - \sqrt{2})^2 = x^2 - 2\sqrt{2}x + 2$

$x^2 - 1 = 2\sqrt{2}x$

$(x^2 - 1)^2 = 8x^2$ ← Vigyázat Alg 1 bői!

$\boxed{x^4 - 10x^2 + 1} = 0$

ired ???

x^4-10x^2+1 irred-e $\mathbb{Q}$ fölött.

$\sqrt{2}+\sqrt{3}$ gyöke $\quad -\sqrt{2}-\sqrt{3}, \quad \sqrt{2}-\sqrt{3}, \quad -\sqrt{2}+\sqrt{3}$

[Alg 1 kitérő.

$$\underbrace{(x-\sqrt{2}-\sqrt{3})(x-\sqrt{2}+\sqrt{3})}\overbrace{(x+\sqrt{2}-\sqrt{3})(x+\sqrt{2}+\sqrt{3})}$$

nincs rac. gyök $\Rightarrow$ 2 másodfokú szorzata?

$$(x-\sqrt{2})^2-(\sqrt{3})^2=(x^2-2\sqrt{2}x+2-3) \qquad (x^2+2\sqrt{2}x-1)$$

$\sqrt{2}$ benne van.

A második párosításnál $\sqrt{3}$,

A harmadik — " — $\sqrt{6}$ marad benne.

Számelm. alapt. miatt.]

$x^4-2x^2+5 \qquad \pm\sqrt{2}\pm i$

[itt együtt a valósra bontás
de benne marad a $\sqrt{2}$.]

$x^4 - 4x^2 + 9$

$L = \mathbb{Q}(\sqrt{2} + i)$ normális? $\mathbb{Q}$ fölött?

$\frac{1}{\sqrt{2}+i} = \frac{\sqrt{2}-i}{(\sqrt{2})^2 - i^2} = \frac{\sqrt{2}-i}{3} \Rightarrow \sqrt{2}-i \in L \Rightarrow \sqrt{2}, i \in L$

Ha igen: Igaz, mert akkor a min. pol. normális és az $x^4 - 4x^2 + 9$ -nek.

F: $1, \sqrt{2}, i, i\sqrt{2}$? $\mathbb{Q}$ fölött

$x^4 - 10x^2 + 1$

$T = \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3}) > \mathbb{Q}$ normális?

Van-e 4 független vázm benne?

$$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\underbrace{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}_{(\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2 = 1}} = \sqrt{3} - \sqrt{2} \in T$$

$\Rightarrow (\sqrt{2}+\sqrt{3}) + (\sqrt{2}-\sqrt{3}) = 2\sqrt{2} \in T \Rightarrow \sqrt{2} \in T$

$\Rightarrow \sqrt{3} \in T.$

$1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6}$ F? VII/2

$1, \sqrt{2}, i, i\sqrt{2}$ $\mathbb{Q}$ fölött (F)

$a + b\sqrt{2} + ci + di\sqrt{2} = 0$

Re $a + b\sqrt{2} = 0$

Im $c + d\sqrt{2} = 0$

$1, \sqrt{2}$ (F)

$a = b = c = d = 0$ ✓

$\sqrt{3} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ nincs.

$\sqrt{3} \in \mathbb{Q}$
$\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$
$\sqrt{6} \in \mathbb{Q}$ ↯.

$\sqrt{11} / 2$

$\boxed{\sqrt{b} \in K(\sqrt{c})}$

$\sqrt{b} = u + v\sqrt{c}$ $u, v \in K$

$b = u^2 + 2uv\sqrt{c} + v^2 \cdot c$

Ha $uv \neq 0 \Rightarrow \sqrt{c} \in K$

$u = 0$ $\sqrt{\frac{b}{c}} \in K \Longleftrightarrow \sqrt{bc} \in K$

$v = 0$ $\sqrt{b} \in K$ $c\sqrt{\frac{b}{c}}$

$n > 1$ négyzetmentes $\Rightarrow \sqrt{n} \notin \mathbb{Q}$.

$\sqrt{5} \overset{?}{\in} \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) = (\mathbb{Q}(\sqrt{2}))(\sqrt{3})$, $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$

$\sqrt{5} \in K \to \sqrt{5} \in \mathbb{Q}$
$\sqrt{3} \in K \to \sqrt{2} \in \mathbb{Q}$
$\sqrt{15} \in K \to \sqrt{10} \in \mathbb{Q}$ ...