$\mathbb{R}[x] / (x^2+1) \cong \mathbb{C}$

$f(x) \equiv a+bx \pmod{x^2+1}$

REPREZENTÁNSOKKAL ☺

$\mathbb{Z}[x] / (4, x) \leftarrow I$

$f(x) = a_0 + \underbrace{a_1 x + \dots}_{\in I} \equiv a_0 \pmod{I}$

a_0 helyett 4-es maradék, mert $4 \in I$

0, 1, 2, 3 a reprezentánsok. $\left(\begin{matrix} x \equiv 0 \\ 4 \equiv 0 \end{matrix} \right)$

mod 4 $\mathbb{Z}_4$-gyel izomorf.

$$\mathbb{Z}(x) / (4,\ 2x,\ x^2) \leftarrow I$$

$$f(x) = a + bx + cx^2 + \ldots \equiv a + bx \quad (I)$$

$x^2 = 0\ (I)$ a-val mod 4

$2x \equiv 0\ (I)$ b-vel mod 2

$4 \equiv 0\ (I)$

Repr: $a + bx$ $\quad 0 \le a \le 3,\ 0 \le b \le 1$

$\boxed{\text{8 elem van}}$ 8 elemű gyűrű.

Mi invertálható?

$$(a+bx)(c+dx) \equiv 1 \quad (I)$$

$$ac + (ad+bc)x + \underbrace{bd\,x^2}_{\equiv 0}$$

$ac \equiv 1\ (4)$
$2 \mid ad + bc$

$a, c: \pm 1$
($\Rightarrow a = c$)
$ad + bc = a(b+d)$ $\quad 2 \mid b + d$
$(b, d = 0, 1)$ $\quad b = d = 1$ vagy $b = d = 0$

$1 + x$
1
$3 + x$
3

inv. elt.

$\boxed{\text{4 db}}$

$$\underbrace{\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}}_{a} + \underbrace{\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}}_{b} = \alpha \in \mathbb{R}$$

α min. pol ? $\quad x-2 \quad = 2$

$$\alpha^3 = \underbrace{a^3+b^3}_{14} + 3\underbrace{ab}_{7^2-(5\sqrt{2})^2=-1}(a+b) = 14-3\alpha$$

$\to$ α foka ≤ 3

$\to$ $x^3+3x-14$ -nek α gyöke.

α foka ≤ 2

$(x-2)(x^2+2x+7)$

nincs valós gyöke

$\to$ $\alpha = 2$. $\to$ foka 1.

2 gyöke $\Rightarrow$ nem irred.

$\not\Rightarrow$ $\alpha = 2$

$7+5\sqrt{2} = (1+\sqrt{2})^3$

$7-5\sqrt{2} = (1-\sqrt{2})^3$

$\alpha = 1+\sqrt{2}+1-\sqrt{2} = \underline{\underline{2}}$.

α foka $\le$

$\le 2\cdot 3\cdot 2\cdot 3$

$= \underline{\underline{36}}$

$\cos 20^\circ$ 3. fokú

$\cos(3\alpha)$ kiszámításával.

3. fokú irred. [illegible] gyöktest.

60° szerkeszthető

Ha 20° szerkeszthető lenne

$\frac{360}{20} = 18 \Rightarrow$ akkor 18-szög szerkeszthető lenne

$18 = 2 \cdot 3^2$ nem

3 Fermat-prím, de a négyzete nem.

$\boxed{\text{Tf } n^\circ \text{ szög csak} \iff 3 \mid n}$

VII / 6, 8, 9

$$\mathbb{Q}(\sqrt{6}) \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{2}+1)$$

$$\sqrt{6} = \sqrt{3}\,((\sqrt{2}+1)-1) \checkmark$$

$$1/2 - 1/3 = 1/6$$

$$\sqrt{2} = 2^{1/2} \qquad \sqrt[3]{2} = 2^{1/3}$$

$$\sqrt[6]{2} = 2^{1/6}$$

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{2}) = \mathbb{Q}(\sqrt[6]{2})$$

$$(\sqrt[6]{2})^2 = \sqrt[3]{2}, \quad (\sqrt[6]{2})^3 = \sqrt{2}, \quad \sqrt[6]{2} = \sqrt{2}/\sqrt[3]{2} \checkmark$$

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3})$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{(\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2} = \sqrt{3}-\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3})$$

$$\sqrt{3}+\sqrt{2} \in \text{—} \;''\; \text{—}$$

$$\overline{\sqrt{2}, \sqrt{3} \in \text{—} \;''\; \text{—}}$$

$$\sqrt[6]{2} = a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4}$$

$$\sqrt{2} = a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4}$$

$$\sqrt[6]{2},\ \sqrt{2} \stackrel{?}{\in} \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$$

<u>Tétel</u> $\quad K \leq L,\ \alpha \in L \Rightarrow \mathrm{gr}_K(\alpha) \mid |L:K|$

$|\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) : \mathbb{Q}| = 3 \qquad \sqrt[3]{2}$ min. pol $x^3 - 2$ Sch.-E.

$\sqrt[6]{2}$ fok-a $\mathbb{Q}$ fölött $= 6 \qquad 6 \nmid 3$

$\sqrt{2}$ — " — $= 2 \qquad 2 \nmid 3$

$\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ elemei : $\mathbb{Q}$ elemei különbözők a többi 3 foká $\mathbb{Q}$ fölött.

$\sqrt[4]{2}$ fok $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ = 2

x^4-2, sőt $\boxed{x^2-\sqrt{2}}$

≤ 2 foka 1 a foka (indirekt)

$\sqrt[4]{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$

foka 2

foka 4 $\mathbb{Q}$ fölött

$4 \neq 2$

$|\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) : \mathbb{Q}| = \boxed{4}$ (volt)

$\mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3})$ ''

$\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}(\sqrt{2})$

$\mathbb{Q} \underset{2}{\leq} \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \leq \mathbb{Q}(\sqrt{2})(\sqrt{3})$

$\leq 2 \Rightarrow 2$

$\neq 1$

x^6-2 Sch

$|\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{2}) : \mathbb{Q}| \overset{?}{=} 6$ $\quad \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{2}) = \mathbb{Q}(\sqrt[6]{2})$

$|\mathbb{Q}(\sqrt{2}\sqrt[3]{2}) : \mathbb{Q}| \overset{?}{=} 6$ $\quad \sqrt{2}\sqrt[3]{2} = 2^{5/6}$

$x^6 - 32$

nem Sch-E

$\frac{2}{\sqrt{2}\sqrt[3]{2}} = 2^{1-5/6} = 2^{1/6}$

$= \sqrt[6]{2}$

$\mathbb{Q}(\sqrt{2}\sqrt[3]{2}) \overset{?}{=} \mathbb{Q}(\sqrt[6]{2})$ ✓

$\hookrightarrow (\sqrt[6]{2})^5$

$\sqrt[4]{2}$ foka $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{7})$ fölött

i '' 2 $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$

x^2+1 jó i-re ≤ 2

1 nem lehet, mert

$i \notin \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$ ← valós

$\sqrt[4]{2}$ foka $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{7})$ fölött $= y = 4$

x^4-2 Sch

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}) & & \\ & \overset{4}{\leq} & & \overset{x^3-7}{\leq} & \\ \mathbb{Q} & & & & \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}, \sqrt[3]{7}) \\ & \underset{3}{\leq} & & \underset{x^4-2}{\leq} & \\ & & \mathbb{Q}(\sqrt[3]{7}) & & \end{array}$$

$\Rightarrow x \leq 3$

$y \leq 4$

x^3-7 Sch

$4x = 3y$

$x \leq 3, \; y \leq 4$

$\Rightarrow (3,4) = 1$ miatt

$3 \mid x$, $4 \mid y$ $\Rightarrow$ $x = 3$, $y = 4$.

Rel prím fokúakkal bővítünk $\Rightarrow$ összeszorzódik a fok.

$\Rightarrow$ x^3-7 továbbra is irred $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$ fölött

x^4-2 — " — $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{7})$ — " — .

Mert a bővítés foka = pol. foka $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ ez a min. pol.

$\mathbb{Q}(\sqrt{8})$ fölött $\sqrt[4]{2}$ $\quad \mathbb{Q}(\sqrt{8}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ $\quad$ 12

$\quad\quad$ "$2\sqrt{2}$"

$\sqrt[4]{2}$ foka $\mathbb{Q}(i)$ fölött

$\alpha = \sqrt{2} + \sqrt[4]{2}$ foka $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ fölött $\quad (\alpha - \sqrt{2})^2 = \sqrt{2}$

$\sqrt{2} + \sqrt[4]{2}$ foka $\mathbb{Q}$ fölött $\quad$ HF

α gyöke egy másodfokú pol-nak de nem elsőfokú

$\sqrt{2} + \sqrt[4]{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$

$\Rightarrow \sqrt[4]{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ ↯

$\sqrt{\pi}$ foka $\mathbb{Q}(\pi)$ fölött.

$$\mathbb{Q} \overset{2}{\leq} \mathbb{Q}(i) \overset{x}{\leq} \mathbb{Q}(i, \sqrt[4]{2})$$

$$\mathbb{Q} \underset{4}{\leq} \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}) \underset{2}{\leq} \mathbb{Q}(i, \sqrt[4]{2})$$

← előző dolgok

$2x = 4 \cdot 2$

$\Rightarrow x = 4$

KÖU

$x^4 - 2$ irred $\mathbb{Q}(i)$ felett is!!

$x^2 - \pi$ jó $\Rightarrow \leq 2$. fokú

1. fokú?

$\sqrt{\pi} \in \mathbb{Q}(\pi)$

$$\frac{f(\pi)}{g(\pi)} \quad f, g \in \mathbb{Q}[x]$$

$\sqrt{\pi}\, g(\pi) - f(\pi) = 0$

$\pi\, g^2(\pi) - f^2(\pi) = 0$

$x g^2(x) - f^2(x)$ gyöke π transzc.

$\longrightarrow 0$ polinom.

$x \quad f^2(x) = g^2(x)$ és $f, g \in \mathbb{Q}[x]$

mert páratlan foka — foka páros

$\sqrt{\pi}$ foka $\mathbb{Q}(\pi)$ fölött $\boxed{2}$

---

10. feladat a relatív prímes trükk.

11. $K \le L \le N \qquad \alpha \in N$

$\mathrm{gr}_K(L) \ge \mathrm{gr}_L(\alpha)$ (volt előadáson)

m_α^K, m_α^L a két min. pol.

$m_\alpha^K(\alpha) = 0$

$\Rightarrow$ ez pol-ja α-nak L fölött $\Rightarrow m_\alpha^L \mid m_\alpha^K$

$\Rightarrow$ foka $\le$.

$\begin{matrix} m_\alpha^L & & m_\alpha^K \\ \| & & \| \\ 2 & & 3 \end{matrix}$

Kérdés: van-e mindig oszthatóság? NINCS

Példa: $K = \mathbb{Q} \qquad \alpha = \sqrt[3]{2}$ ε primitív 3. e.gy.

$\mathbb{Q} \le \mathbb{Q}(\varepsilon) \le \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \varepsilon)$ HF innen.

$\varphi(3) = 2 \qquad 2 \le \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) \le 3$

$\boxed{12.}$!

7. $\{1, i, \sqrt{2}+3i\}$ I $\mathbb{Q}$

3 dle stim öf U

$\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$ ~~π~~ $\mathbb{R}$ F - e?

$\{1, \pi, 1/\pi\}$ I $\mathbb{Q}$

$a + bi + c(\sqrt{2}+3i) = 0 \quad a, b, c \in \mathbb{Q}$

$\Rightarrow$ Re $\quad a + c\sqrt{2} = 0 \Rightarrow a = c = 0 \quad \sqrt{2}, 1$ F

Im $\quad b + 3c = 0 \Rightarrow b = 0.$

$a + b\pi + c\,1/\pi = 0 \quad /$

$a\pi + b\pi^2 + c = 0$

π gyöke $bx^2 + ax + c \in \mathbb{Q}[x]$

π transz. $\Rightarrow$ ez a 0 polinom.

$\Rightarrow a = b = c = 0 \Rightarrow$ F

14. $\pi + 3$ T

$5\pi + 6$ T

$\pi + \sqrt{2}$ T

$\pi^2 + 2\pi + 2$ T

$\sqrt{\pi}$ T

alg. nebo transc?

Alg. čísla tvoří těleso algebraické.

Úvaha $\pi + 3 = \alpha$ alg. číslo

3 algebraické

$\pi + 3 - 3 = \pi$ alg. číslo ↯.

$\sqrt{\pi}$ alg. číslo $\Rightarrow (\sqrt{\pi})^2$ je alg. ↯

$\pi^2 + 2\pi + 2$ alg?

$\pi^2 + 2\pi + 2 = \alpha$ algebraické

$x^2 + 2x + (2 - \alpha)$ splňuje π

Alg. čísla tvoří těleso alg. zavř. $\pi \in \mathbb{A}[x] \Rightarrow \pi$ alg ↯