$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Gauss-elimináció

1. nem kankázunk
2. cél $\begin{vmatrix} a_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{vmatrix} = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n$ főátló alatt mindent kinullázni.
3. Ha egy sort c-vel megszorzunk, a det is c-szeresére változik.
4. Oszloppal is szabad mindent csinálni.
5. Sorcsere: -1-szeres (oszlopcsere)

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 9 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -7 & -14 \end{vmatrix} = (-7)(-1) \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 7 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \boxed{7 \cdot 1}$$

első sor 2x-ét 2-ból
— " — 3x-át 3.-ból

3 sorból 2-at

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 9 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \\ 3 & 2 \end{matrix}$$

$1\cdot5\cdot1 + 3\cdot9\cdot3 + 5\cdot2\cdot2 -$

$- 5\cdot5\cdot3 - 1\cdot9\cdot2 - 3\cdot2\cdot1 =$

$= 5 + 81 + 20 - 75 - 18 - 6 =$

$= 106 - 99 = \boxed{7}$

$\boxed{\text{SARRUS}}$ - szabály

CSAK 3x3-asra

KIFEJTÉS (bármekkorára)

Aldeterminánus: kihúzunk egy sort és egy oszlopot

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 9 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

1. sor 2. eleméhez

$-\begin{vmatrix} 2 & 9 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$

$(-1)^{i+j}$ az előjel

$= (-1)^{1+2} = -1$

$\| - (2\cdot1 - 3\cdot9) = 25$

Előjeles aldet.

Előjelezés: sakktábla-szabály

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$

Pl. első sor szerinti kifejtés:

$\sum$ végig a soron $\forall$ elemet · hozzá tartozó előjeles aldet

(oszlop szerint is szabad)

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 9 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1\left(+\begin{vmatrix} 5 & 9 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\right) + 3\left(-\begin{vmatrix} 2 & 9 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}\right) + 5\left(+\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}\right)$$

$$= 1(5\cdot 1 - 2\cdot 9) - 3(2\cdot 1 - 3\cdot 9) + 5(2\cdot 2 - 3\cdot 5)$$

$$= -13 + 75 - 55 = \boxed{7}$$

3. oszlop szerint

$$5\underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}}_{-55} - 9\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}}_{+63} + 1\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}}_{-1} = \underline{\underline{7}}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \underline{\underline{-1}}$$

3 sacsere

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & +2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \end{vmatrix} =$$

Gauss

$$= (-2)(-2)(-2)(-1) \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -8 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= -8 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 8 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 8 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = \underline{\underline{\boxed{48}}}$$

$$\begin{array}{cccc} 6 & ? & 6 & 6 & 6 \end{array}$$

$$\begin{vmatrix} \cancel{1} & \cancel{1} & \cancel{1} & \cancel{1} \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 6 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \underline{\underline{6 \cdot 8}} = \underline{\underline{48}}$$

első sort a többiből

??? $\updownarrow$

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

elsőhöz + többit

$$\begin{vmatrix} x & & a \\ & x & \\ a & \ddots & x \end{vmatrix} = ?$$

$$\begin{vmatrix} 1 & & & 2 \\ & 2 & & \\ & & 3 & \\ 2 & & & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} =$$

2 sort a többiből

1. oszlop szerint a 2.-at

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{vmatrix} = ?$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \boxed{-4}$$

(vagy az elsőre 2x -át + a 2.-hez

$$\begin{vmatrix} 1 & & & 2 \\ & 2 & & \\ 2 & & 3 \cdot 4 \cdot 5 & \\ & & & n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cancel{2} & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \dots & 0 \\ & & 2 & & 0 \\ & 0 & & 3 & \\ & & & & n-2 \end{vmatrix} = -2(n-2)!$$

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & x_2 - x_1 & x_2^2 - x_1 x_2 \\ 1 & x_3 - x_1 & x_3^2 - x_1 x_3 \end{vmatrix} =$$

utolsó oszloptól visszafelé haladva
∀ oszlopból vonjuk ki az előző oszlop x_1-szeresét.

kifejtjük az első sor szerint

$$= \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_2(x_2 - x_1) \\ x_3 - x_1 & x_3(x_3 - x_1) \end{vmatrix} =$$

$$= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \begin{vmatrix} 1 & x_2 \\ 1 & x_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & x_2 \\ 1 & x_3 \end{vmatrix} = (x_3 - x_2)$$

HF 4×4.

$(x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_4 - x_1)$
$(x_3 - x_2)(x_4 - x_2)$
$(x_4 - x_3)$

$n \times n$ indukció

VANDERMONDE det.

HF 4-9.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 5 & 6 & 1 & 4 & 3 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$

<u>inverzió</u> ... $i < j$ ...
$a > b$

~~25~~ ~~26~~ 21 ~~24~~ ~~23~~ ~~28~~ ~~27~~

~~56~~ 51 54 53 ~~58~~ ~~57~~

61 64 63 ~~68~~ ~~67~~

~~14~~ ~~13~~ ~~18~~ ~~17~~

43 ~~48~~ ~~47~~

~~38~~ ~~37~~

87

$\binom{8}{2}$ pár lesz

inverzió:
első a nagyobb O
többi /

9 inverzió
Páratlan permutáció.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 7 & 6 & 4 & 8 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

~~57~~ ~~56~~ 54 ~~58~~ 57 52 51

76 74 ~~78~~ 73 72 71

64 ~~68~~ 63 62 61

~~48~~ 43 42 41

83 82 81

32 31

21

22 db

páros perm.

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ c & a & e & b & d \end{pmatrix}$$

ca ~~ce~~ cb ~~cd~~

~~ae~~ ~~ab~~ ~~ad~~

eb ed

~~bd~~

4 db

páros perm.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

inverzió: $\binom{n}{2}$ $\binom{5}{2} = 10$ páros

5. feladat 5 elemű páratlan: max 9, és

ez lehetséges is:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \cancel{1} & \cancel{4} & \cancel{3} & \cancel{2} & \cancel{5} \end{pmatrix}$$

egyéb, melyek: 4 5 3 2 1

5 3 4 2 1 stb.

HF* (∀ permutáció cserék szorzata.)
$\leq n-1$ csere kell

Van-e olyan permutáció, amihez kell $n-1$ csere, kevesebb nem elég.

12. feladat elhet segít.

---

det def. megismételni

HF 4–7 HF* 8–9.