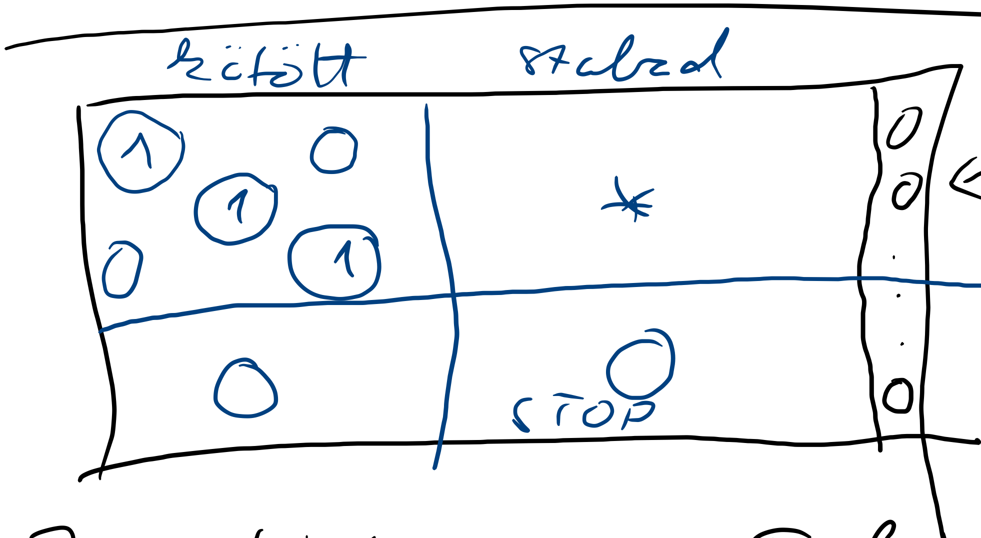
III / 22, 23 ← HF

$\mathbb{Q}$ felett homogén lin. egy. rendszer.
∃ nemtriv. $\mathbb{C}$-beli megoldás.
$\mathbb{Q}$ fölött hány mo?



homogén

⇒ ∃ megoldás:
változó = 0
TRIVIÁLIS MEGOLDÁS.

∃ nemtriv. m.o. $\mathbb{C}$-ben.

$\mathbb{Q}$ fölött ~~0~~, ~~1~~, $\boxed{\infty}$ → 1? ⟺ nincs szabad.

Homogén
∃ triv. m.o.

Ki az ezen m.o.?
TRIVIÁLIS. $\mathbb{C}$ fölött is
ugyanaz az elimináció ↯

⇒ ∃ szabad változó
⇒ ∞ sok m.o. $\mathbb{Q}$ fölött.

Mese.

Térben $(1,2,3)$ pont

A : $x+y+z=0$ síkra tükrözés

B : z-tengely körüli $60°$ forgatás

$A(B(123))$ melyik pont?

$A \circ B$: $x \longmapsto A(B(x))$ melyik transzformáció?

$A \to$ 3×3 mátrixot

$B \to$

$A \circ B$ a két mátrix szorzata.

pont képe : mátrix · pont vektora.

T test = skalárok $\rightsquigarrow$ vektorok, mátrixok

$T_{\mathbb{R}}$ pl.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}}_{T^n} + \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1+b_1 \\ \vdots \\ a_n+b_n \end{bmatrix} \qquad \underset{\substack{\lambda \in T \\ \text{skalár}}}{\lambda} \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a_1 \\ \vdots \\ \lambda a_n \end{bmatrix}$$

komponensenként

$$k \text{ sor} \overbrace{\begin{bmatrix} \quad T \text{ elemei} \quad \end{bmatrix}}^{n \text{ oszlop}}$$

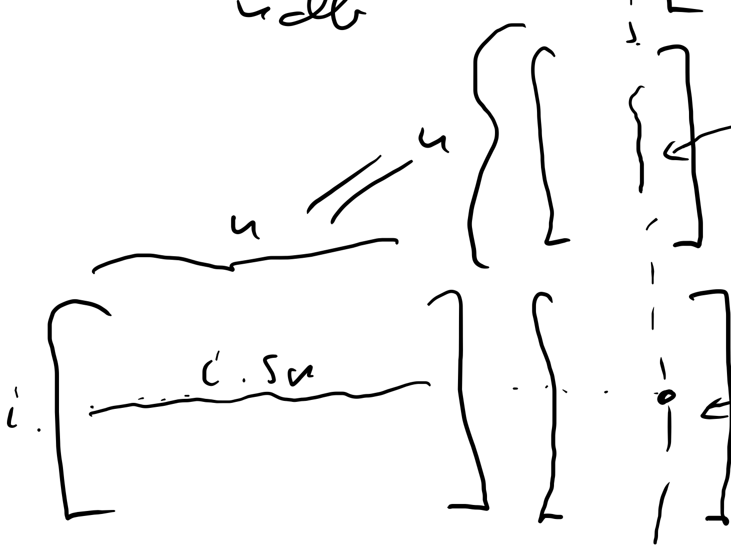
$k \times n$-es mátrix $\quad T^{k \times n}$ ezek halmaza.

$+$, λ-szoros ugyanúgy komponensenként.

Oszlopvektorok egyfajta mátrixok.

SZORZÁS

$$\underbrace{[a_1 \; \ldots \; a_n]}_{n \text{ db}} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} n \text{ db} \overset{\text{def.}}{=} a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n$$



i. sor j. eleme = i. sor · j. oszloppal.

Transzponálás.

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{(oszlopokat sorokba)}]{\text{sorokat oszlopokba}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} = M^T$$

tükrözés a „főátlóra".

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad C^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 8 \end{pmatrix}$$

$\cancel{AB}$, BA, $\cancel{BC}$, $CB - C$ igen

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}}_{\text{NEM } 3\times 2} \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3\cdot 1 + 7\cdot 0 & 3(-3) + 7\cdot 1 & 3\cdot 2 + 7\cdot 3 \\ 4\cdot 1 + 1\cdot 0 & 4(-3) + 1\cdot 1 & 4\cdot 2 + 1\cdot 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \underline{\underline{\begin{pmatrix} 3 & -2 & 27 \\ 4 & -11 & 11 \end{pmatrix}}} \checkmark$$

$CB - C$

$$\begin{pmatrix}1&1\\2&3\\0&8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&7\\4&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7&8\\18&17\\32&8\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1&1\\2&3\\0&8\end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix}6&7\\16&14\\32&0\end{pmatrix}}}$$

HF IV/2 gyakorlásra.

Nem komm. és van 0-osztó a szorzás!

$$\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix} \neq 0$$

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix} = 0 \quad (0 \text{ mátrix})$$

$\leftarrow$ van 0-osztó.

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} \neq 0$$

$$\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$$ nem komm.

$$\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$$

$AC = BC \iff (A-B)C = 0$

de $A \neq B$, $C \neq 0$

$$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$ de nincs benne 0.

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \checkmark$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \leftarrow C \qquad (A-B)C = 0$$

$$\neq \quad \neq$$

$$0 \quad 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$A-B$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$H \quad \overline{IX}/3 \qquad 10 \times 100\text{-as}$

$5 \times 5 \quad ((u_{ij})) \qquad u_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{ha } i-j=1 \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & \\ & \end{pmatrix}$$

$u_{11} = 0$ mert $1-1 \neq 1$

$u_{12} = 0 \quad 1-2 \neq 1$

$u_{21} = 1 \quad 2-1 = 1$

$n_{ij} = \begin{cases} 1 & : \quad i-j=1 \\ 0 & \end{cases}$

2 - 1
3 - 2
4 - 3
5 - 4

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = N$$

$N^3 \stackrel{?}{=} (N \cdot N) N = N^2 \cdot N$

$N^3 \stackrel{?}{=} N \cdot N^2$?

$N \cdot (N \cdot N)$

asszociatív!

$N^3 = \begin{pmatrix} & & O \\ 1 & & \\ 0 & 1 & \end{pmatrix}$ $N^4 = \begin{pmatrix} & O \\ 1 & \end{pmatrix}$

$N^5 = O$.

NILPOTENS mátrix.

Hol lesz 1-es?

1·1-ek?

$$\begin{pmatrix} 1 & & O \\ & 1 & \\ O & & 1 \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

feljebb 1-es sor kijjebb csúszik.

$$\begin{pmatrix} 1 & & O \\ O & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & O \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

N^2

$$\begin{pmatrix} & \\ 0 & \end{pmatrix}$$

felső háromszög-mátrix

$$\begin{pmatrix} b_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & b_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a_1b_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & a_nb_n \end{pmatrix}$$

H

$$\begin{pmatrix} b_1 & * \\ 0 & b_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & * \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1b_1 & * \\ 0 & a_2b_2 \end{pmatrix}$$

$a_1 \cdot b_1 + * \cdot 0 = a_1 b_1$

$a_1 \cdot * + * \cdot b_2 = ?$

$0 \cdot b_1 + a_2 \cdot 0 = 0$

$0 \cdot * + a_2 b_2 = a_2 b_2$

M $n \times n$-es N is

E egységmátrix $\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}_{n \times n}$ $EN = NE = N$

$M = N^{-1}$ inverz $MN = NM = E$.
(Tétel $MN = E \Rightarrow NM = E$.)

Gauss-eliminációs invertálási algoritmus

$\left[\begin{array}{c|c} M & E \end{array} \right]$ n sor, 2n oszlop
Elimináció
csak a bal oldalon 1.
szabad sort cserélni.

Ha keletkezik olyan sor, amiben a bal fele végig 0
$\Rightarrow M^{-1}$ NEM LÉTEZIK.

Ha nem

$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & & 0 & \\ & \ddots & & M^{-1} \\ 0 & & 1 & \end{array} \right]$ eredmény.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim$$

1. sor 2-szeresét 2.-ból kivonjuk

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right] \sim$$

2. sor 2-szeresét az elsőből

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & +5 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

Ellenőrzés:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \checkmark$$

$1 \cdot 5 + 2(-2) = 1$

$2 \cdot 5 + 5(-2) = 0$

$$\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}^{-1} = ? \quad \text{önmaga} \quad \longrightarrow \quad \frac{1}{-1}\begin{pmatrix}0&-1\\-1&0\end{pmatrix} \checkmark$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc}0&1&1&0\\1&0&0&1\end{array}\right] \quad \text{sorcsere}$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc}1&0&0&1\\0&1&1&0\end{array}\right]$$

$$\begin{pmatrix}\frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc}\\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc}\end{pmatrix}$$

$$=$$

2×2-es képlet

$$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix}d&-b\\-c&a\end{pmatrix}$$

$\exists$ inverz $\iff ad-bc \neq 0$

főátló csere

mellékátló $\ominus$

HF 17

16 M, N nem invertálható

Példa: $M+N$ igen

M, N invertálható

$M+N$ nem

$$\underset{\text{nem}}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} + \underset{\text{nem}}{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} = \underset{\text{igen}}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

$$\underset{\text{igen}}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} + \underset{\text{igen}}{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}} = \underset{\text{nem}}{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

ad-hc

$$\boxed{(MN)^{-1} = N^{-1}M^{-1}}$$

$MNN^{-1}M^{-1} = E$

Rendben

a sorrend!