NEM. IGEN

$2x \overset{?}{\mid} 3x^2$ $\quad \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ fölött.

$f \mid g \iff \exists h : \quad fh = g.$

$R[x]$ HOL? $\in R[x]$

$\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ is lehet

$$\underbrace{(2x)\left(\tfrac{3}{2}x\right)}_{h(x)} = 3x^2$$

$h(x) \in \mathbb{Q}[x], \mathbb{R}[x], \mathbb{C}[x].$

$\notin \mathbb{Z}[x].$

$\exists$-e $h \in \mathbb{Z}[x]$ $\quad h(x) \cdot 2x = 3x^2$

[$\mathbb{Q}[x]$-ben maradékos osztás szerint. $\Rightarrow$ NINCS]

$h(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n \quad a_i \in \mathbb{Z}$

$2x\, h(x) = 2a_0 x + 2a_1 x^2 + 2a_2 x^3 + \dots + 2a_n x^{n+1} \overset{?}{=} 3x^2.$

Polinomok egyenlősége: $\quad x: \quad 2a_0 = 0$

$x^2: \quad 2a_1 = 3$ ← BAJ

$2 \nmid 3.$ NINCS

$6(x^2-2)(x^2+1)$ felbonthatatlanok szorzata.

?? $2\cdot 3\cdot (x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(x+i)(x-i)$?? SZÉTTOL

Egység: Minden osztója. $(\Leftrightarrow$ 1-nek osztója$)$

$\mathbb{Z}[x]$ $f(x) \mid 1 \Rightarrow f$ konstans (főszámok!) $f(x)=a_0 \mid 1$

$\Rightarrow a_0 = \boxed{\pm 1}$

$\mathbb{Q}[x]$ – " –

$\underset{f(x)}{a_0} \cdot \underset{h(x)}{b_0} = 1$ $\forall a_0 \neq 0$ $b_0 = 1/a_0$

$\forall \neq 0$ konstans, és más nem.

$\mathbb{R}[x]$ és $\mathbb{C}[x]$: ugyanez.

Felbonthatatlan nem egység.

2 nem felb.-lan $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ fölött.

$\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ Elsőfokú mindig felbonthatatlan. 4 tényező

$\mathbb{C}$: $(6x+6i)(x-i)(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$ ugyanaz, mint $(x+i)(x-i)(2x-2\sqrt{2})(3x+3\sqrt{2})$

egységekben különböznek. Pl: $2\cdot 3 = (-2)(-3)$ is ugyanaz $\mathbb{Z}$-ben.

$\mathbb{R}$ $\quad (6x-6\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(x^2+1)$ $\quad$ 3 tényező

felb.-lan $\mathbb{R}$ fölött

2. vagy 3. fokú irred

"

felbonthatatlan

$\Leftrightarrow$ nincs gyök $\mathbb{R}$-ben.

$\mathbb{Q}$: $\quad (6x^2-12)(x^2+1)$ $\quad \boxed{\text{2 tényező}}$

$\mathbb{Z}$: $\quad 2\cdot 3\cdot(x^2+1)(x^2-2)$ $\quad \boxed{\text{4 tényező}}$

Indoklás: később.

$\mathbb{C}$ $\quad$ irred $\Leftrightarrow$ elsőfokú

$\mathbb{R}$ $\quad$ —"— $\quad$ — $\quad$ —"— vagy 2. fokú, de nincs valós gyöke.

10, 11, 6, 7.

10. $2x^4-4$ $\quad \mathbb{C}$, $\mathbb{R}$

11. $x^{12}-4096$ $\quad \mathbb{C}$, $\mathbb{R}$. HF

$4096 = 2^{12}$

főegyüttható kedvéért gyöktényezős alak

x^4-2 gyökei $\pm\sqrt[4]{2}$, $\pm i\sqrt[4]{2}$

$\mathbb{C}$ $\quad (2x-2\sqrt[4]{2})(x+\sqrt[4]{2})(x-i\sqrt[4]{2})(x+i\sqrt[4]{2})$.

$\mathbb{R}$ $\quad (2x-2\sqrt[4]{2})(x+\sqrt[4]{2})(x^2+\sqrt{2})$

(Konjugált gyökpárokhoz tartozó gyöktényezőket összevonjuk.

$\mathbb{Q}[x]$ feletti irred: nehezebb!

---

6. $(x^5+1,\ x^{15}-1) = ?$ (Vagy Eukl. alg.)

$(8,12) = (2^3,\ 2^2\cdot 3) = ?$

$(2^3\cdot 3^0,\ 2^2\cdot 3^1) = 2^{\min(3,2)}\cdot 3^{\min(0,1)} = 2^2 = \underline{\underline{4}}$

$\left.\begin{array}{l} x^5+1 \\ x^{15}-1 \end{array}\right]$ gyöktényezőkre (ezek $\mathbb{C}$ felett az irred. tényezők)

Mindkettőt a „közösség" határozza.

$x^{15}-1 = (x-\varepsilon_1)\dots(x-\varepsilon_{15})$ $\quad \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{15}$ 15. egységgyökök

$x^5-1 = (x-\alpha_1)\dots(x-\alpha_5)$

(HF $\alpha_1, \dots, \alpha_5$ 10. de nem 5. egységgyökök)

Elég: nincs közös gyök, ha ezt alkalmazzuk, hogy relatív prímek.

$x^{15}-1$ mik közös gyök?

x^5+1 α közös gyök

$$\left.\begin{array}{l}\alpha^{15}=1\\ \alpha^{5}=-1\end{array}\right\}$$

$\alpha^5=-1 \Rightarrow \alpha^{15}=(\alpha^5)^3=(-1)^3=-1\neq 1$ ↯

$(x^{15}-1,\ x^5+1)=1.$

---

7. $(x^n-1,\ x^m-1)$

$$x^n-1=\prod_{\substack{\varepsilon\ n.\\ \text{egy.gy.}}}(x-\varepsilon) \qquad x^m-1=\prod_{\substack{\eta\ m.\\ \text{e.gy.}}}(x-\eta)$$

Közös: $\displaystyle\prod_{\theta}(x-\theta) = \boxed{x^{(n,m)}-1}$

↗ n. és m. egységgyök $\leftarrow$ (n,m)-ik egységgyökök.

↳ rendje $\mid n,m$

$\Leftrightarrow$ rendje $\mid (n,m)$

Schönemann-Eisenstein:

$a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n = f(x) \in \mathbb{Z}[x]$

HA $\exists p$ prímszám: $p \nmid a_n$, $p \mid a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$, $p^2 \nmid a_0$

AKKOR f irred (NEM $\mathbb{Z}$, hanem $\mathbb{Q}$ fölött.

Sch-E alk-ó-e. ($\exists$-e p).

$x^{11} + 2x + 18$ — $p=2$ jó: $2 \nmid 1$, $2 \mid 2, 18$, $4 \nmid 18$.

$x^{11} + 2x + 12$ — nincs p: csak 2 lehetne, de $4 \mid 12$.

$x^{11} + 2x + 5$ — nincs p: $(2,5)=1$.

$x^{11} + 36$ — nincs

$x^{11} + 72$ — nincs

$x^{11} + 50$ — $p=2$ jó

$x^{11} + 10$ — $p=2,5$ jó

$x^{11} + n$ — $\exists p \Leftrightarrow$ n-ben valamelyik prím az első hatványon szerepel.

"Fordított Sch-E"

$\nearrow \Longleftrightarrow$ megfordítjuk a polinomot.

$p \nmid a_0$, $p \mid a_1, \dots, a_n$, $p^2 \nmid a_n$.

---

16. $6x^4+3x+1$ $3 \nmid 1$, $3 \mid 3, 6$, $9 \nmid 6$.

---

13. x^4+1 Nem Sch, Nem fordított Sch.

4. fokú $\Rightarrow$ nem elég a gyököket nézni!

[$\mathbb{Q}$ fölött is: 2. és 3. fokú esetén
f irred $\Leftrightarrow$ nincs $\mathbb{Q}$-ban gyöke
RAC. GYÖK TESZT.]

$$f(x) = g(x)h(x) \qquad x \longrightarrow x+c$$
$$\Updownarrow \qquad\qquad c \in \mathbb{Z}.$$
$$f(x+c) = g(x+c)h(x+c)$$

f irred $\Leftrightarrow$ $f(x+c)$ irred. ELTOLT.

x^4+1 ?

$(x+1)^4+1 = x^4+4x^3+6x^2+4x+\underbrace{(1+1)}_{2}$

Binom. tétel

$p=2$ Sch-E.

$\Rightarrow$ x^4+1 is irred $\mathbb{Q}$ fölött

„eltolt Sch".

17, 18 HF.

$\Rightarrow$ x^6+1 most.

17: Rac gyököket ki tudni nem találni, is mert látta van.

Ha van: $(x-c)(\ldots)$ nem irred.

14: x^4+x+1

$x^6+1 = (x^2)^3+1^3 = (x^2+1)(x^4-x^2+1)$

$a^3+b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$

$\Rightarrow$ nem irred.

$X^4 + x + 1$ $\boxed{\text{NE}}$ Favágás.

Nincs gyök $\mathbb{Q}$-ban, mert Rac. gy. t. ± 1 nem jó.

$\Rightarrow$ nincs elsőfokú tényező.

$$(ax+b)\,q(x) = x^4+x+1$$

$-b/a$ gyök lenne

$$x^4+x+1 = (x^2+ax+b)(x^2+cx+d)$$

konstans: $bd = 1$

x: $ad + cb = 1$

x^2: ...

x^3: $a + c = 0$

$a+c=0$ $c = -a$

$a(d-b) = 1$

$bd = 1$

Gauss-lemma II $\rightsquigarrow$ feltehető, hogy a, b, c, d egész.

Ekkor $bd = 1 \Rightarrow b = d = \pm 1$ ↯.

Stratégia f irred-e $\mathbb{Q}$ fölött

1. Sch-E, fordított Sch-E
2. Rac. gyököket (ha van, akkor irr., ha nincs, de $gr(f) \mid 2$ vagy 3, akkor irr.)
3. vezetés azonosság, eltolt Sch. Faktorizás.

---

18. HF.

$x^4 - 10x^2 + 1$ irred

de semmilyen eltolt sem Sch-E.

Gyökei $\pm 2 \pm \sqrt{3}$