VI/12. x^3+3x+1 gyökei a, b, c

Kell: amelynek a gyökei a^2, b^2, c^2 ill. $a+b$, $a+c$, $b+c$

$$(x-a^2)(x-b^2)(x-c^2) =$$

$$x^3 - \underbrace{(a^2+b^2+c^2)}\,x^2 + \underbrace{(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)}\,x - \underbrace{a^2b^2c^2}_{1}$$

$$\sigma_k = (-1)^k \frac{a_{n-k}}{a_n}$$

$$\left.\begin{aligned} \sigma_1 &= a+b+c = 0 \\ \sigma_2 &= ab+ac+bc = 3 \\ \sigma_3 &= abc = -1 \end{aligned}\right\}$$

$$a^2+b^2+c^2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2 = 0^2 - 2\cdot 3 = \boxed{-6}$$

$$a^2b^2c^2 = (-1)^2 = \boxed{1}$$

$$a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2 = ?$$

9

$$(ab+ac+bc)^2 =$$

$$= \underbrace{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}_{\overset{?}{=}\ \boxed{9}} + \underbrace{2abac+2abbc+2acbc}_{2abc(a+b+c) = 0}$$

$$\boxed{x^3+6x^2+9x-1}$$

$$(x-(a+b))(x-(a+c))(x-(b+c))$$

$(a+b)(a+c)(b+c)$ szigmákkal

GYAKORLÓ HF behelyettesítéssel

$$(x-(a+b))(x-(a+c))(x-(b+c))=?$$

$$a+b+c=0$$

$$(x+c)(x+b)(x+a)=$$

$$=x^3+(a+b+c)x^2+(ab+ac+bc)x+abc=$$

$$=x^3 \qquad +3x-1$$

$$x^2+bx+c=(x-x_1)(x-x_2)$$

$$x_1+x_2=-b$$

$$x_1x_2=c$$

$$(x_1-x_2)^2=x_1^2+x_2^2-2x_1x_2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2$$

$$(-b)^2-4c=\underline{b^2-4c}$$

(DISZKRIMINÁNS középben (itthoni tananyag))

$\rightarrow$ gyök alatt a megoldóképletben!

$\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ n. egységgyökök

$\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_n = ?$ $\sigma_1 = 0$ kivéve $n=1$.

$\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n = ?$ $\sigma_n = (-1)(-1)^n = (-1)^{n+1}$

($\varepsilon_1^2 + \ldots + \varepsilon_n^2$ HF)

$\sigma_1^2 - 2\sigma_2$

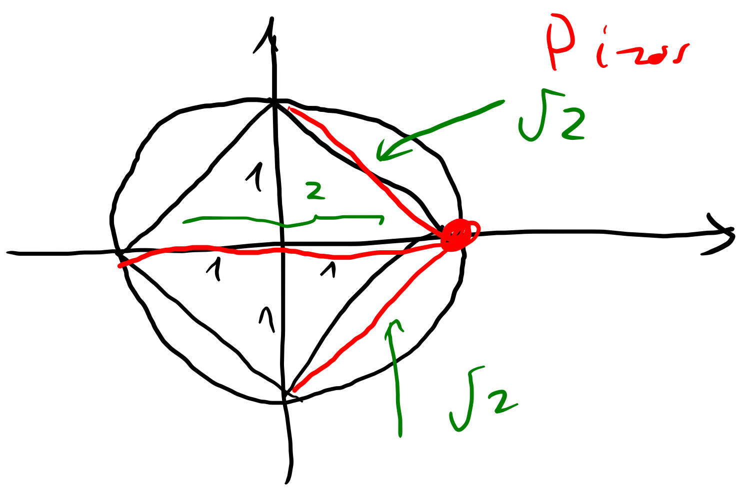
$(x-\varepsilon_1)\ldots(x-\varepsilon_n) = \boxed{x^n - 1}$

gyökei def. szerint pont az n. egységgyökök

(mindegyik egyszer, mert ez n kül. szám.)

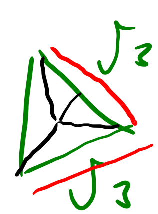
III/10.

szabályos n-szög egységsugarú körbe írva



Piros szakaszok hosszának szorzata?

$2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = \boxed{4}$



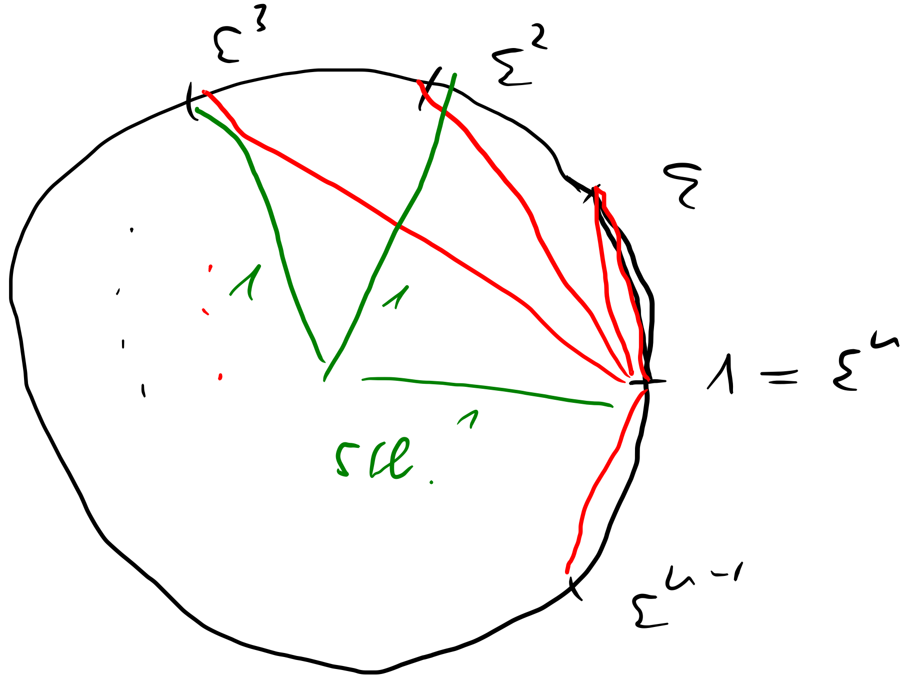
$\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = \underline{\underline{3}}$.

$\boxed{n}$???

Ötszög: $36°$, $18°$, $72°$

sin? cos?

$\sqrt{5}$-ös.



$\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$

z_1 és z_2 távolsága

$\boxed{|z_1 - z_2|}$

$(\varepsilon_i = \varepsilon^i)$

$|(1-\varepsilon)|\,|(1-\varepsilon^2)|\ldots|(1-\varepsilon^{n-1})| \overset{?}{=} n$

$0=0$

$1\cdot\cancel{0} = 2\cdot\cancel{0}$

$1=2$

$= |\underbrace{(1-\varepsilon)\ \ldots\ (1-\varepsilon^{n-1})}_{X}| = ?$

$x^n - 1 = \underbrace{(x-\varepsilon_1)\ldots}_{x=1}(x-\varepsilon_n)$

$\varepsilon_n = 1$

$x+1$ vezető együttható

$X =$

$(x-\varepsilon_1)\ldots(x-\varepsilon_{n-1}) = \frac{x^n - 1}{x-1} = x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1$

$x=1$ $\quad X = 1 + \ldots + 1 = \underline{\underline{n}}.$

ROSSZ! 0-val osztottunk.

$(x-\varepsilon_1)\dots(x-\varepsilon_{n-1}) = x^{n-1}+\dots+1$ $\qquad x+1$

Lehetséges.

$x=1-e$ is osztható?

POLINOMOK AZONOSSÁGI TÉTELE

2 polinom ∞ sok helyen egyenlő $\Rightarrow$ ők mint polinomok is egyenlők $\Rightarrow$ $\forall$ helyen egyenlők.

Interpoláció VI/21 HF (Lagrange, Newton) VI/22 is.

MARADÉKOS OSZTÁS

osztandó

$$
\begin{array}{l}
123 : 7 = \boxed{17} \text{ hányados} \\
\underline{-\ 7} \quad \text{osztó} \\
\ \ 53 \\
\underline{-49} \\
\ \ \ 4 \text{ maradék}
\end{array}
$$

Minta

$$x^3 + 2x + 1 : x^2 - 2 = x$$

$$-(x^3 - 2x)$$

$$4x + 1$$

maradék

foka < osztó foka

főtagok osztása

$$\frac{x^3}{x^2} = x$$

$$x^3 - 2 : 2x^2 + 2x - 3$$

$$x^4 + x^2 + 1 : x^2 + x + 1$$

Visszaszorzás

$$x^3-2 \;:\; 2x^2+2x-3 = \boxed{\tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{2}}$$

hányados

$$\begin{array}{l}
x^3-2\\
-(x^3+x^2-\tfrac{3}{2}x)\\
\hline
-x^2+\tfrac{3}{2}x-2\\
-(-x^2-x+\tfrac{3}{2})\\
\hline
\boxed{\tfrac{5}{2}x-\tfrac{7}{2}}
\end{array}$$

maradék

$$\frac{x^3}{2x^2}=\tfrac{1}{2}x \qquad \frac{-x^2}{2x^2}=-\tfrac{1}{2}$$

$$x^4+x^2+1 \;:\; x^2+x+1 = \boxed{x^2-x+1}$$

$$\begin{array}{l}
x^4+x^2+1\\
-(x^4+x^3+x^2)\\
\hline
-x^3+1\\
-(-x^3-x^2-x)\\
\hline
x^2+x+1\\
-(x^2+x+1)\\
\hline
\boxed{0}
\end{array}$$

Vagyis

$x^2+x+1 \mid x^4+x^2+1$

(osztója).

$$\frac{x^4}{x^2}=x^2 \qquad \frac{-x^3}{x^2}=-x \qquad \frac{x^2}{x^2}=1$$

$x^{64} + x^{54} + x^{14} + 1 : x^2 - 1$

Mi a maradék? $\boxed{4}$

x^2-1 -el osztunk $\Rightarrow$ maradék $ax+b$.

(a hányadost nem kérdezi a feladat).

$x^{64} + x^{54} + x^{14} + 1 = (x^2-1)\,q(x) + (ax+b)$

hányados.

$x=1$ -et behelyettesítjük

$\underbrace{1^{64} + 1^{54} + 1^{14} + 1}_{4} = \underbrace{(1^2-1)\,q(1)}_{0} + (a+b)$

$a+b=4$

$x=-1$ $\quad \underbrace{(-1)^{64} + (-1)^{54} + (-1)^{14} + 1}_{4} = 0 + (-1)a + b$

$\left.\begin{array}{l} b-a=4 \\ b+a=4 \end{array}\right\}$

$\boxed{\begin{array}{l} b=4 \\ a=0 \end{array}}$

TRÜKK osztó gyökét behelyettesítjük

(ha csak a maradékot kérdezik, a hányadost nem.)

$x^{64} + x^{57} + x^{14} + 1 = (x^2+1)q(x) + (ax+b)$

$x = i$ $\quad i^{64} + i^{57} + i^{14} + 1 = ai + b$ $\quad \boxed{0}$

$x = -i$ $\quad$ (nem is kell)

$i^{64} = 1$, $i^{57} = -1$, $i^{14} = -1$

x^2+1 osztója $x^{64}+x^{57}+x^{14}+1$-nek.

$ai + b = 0$

$\Rightarrow a = b = 0$ ha a, b valós!

A maradékos osztás során csak $+, -, \cdot, /$ szerepelt

$\Rightarrow a, b$ is csak kaplató egész együtthatókból

$\Rightarrow a, b$ racionálisak.

$x^2+x+1 \mid x^4+x^2+1$ $\qquad x^2+x+1 = \frac{x^3-1}{x-1}$

$x^4+x^2+1 = (x^2+x+1)q(x) + ax + b$

gyökeit

3. primitív egységgyökök

$-1/2 \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i = \cos 120° + i \sin 120° = \varepsilon$
$\cos 240° + i \sin 240° = \varepsilon^2$

$$x^4 + x^2 + 1 = (x^2 + x + 1)\, q(x) + (ax + b)$$

$\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$

$x = \varepsilon$

$$\varepsilon^4 + \varepsilon^2 + 1 = a\varepsilon + b$$

$\boxed{\varepsilon^3 = 1}$

$\varepsilon + \varepsilon^2 + 1 = 0$

$\varepsilon^4 = \varepsilon$

$\boxed{a\varepsilon + b = 0}$

$x = \varepsilon^2$

$$\varepsilon^8 + \varepsilon^4 + 1 = \boxed{a\varepsilon^2 + b = 0}$$

$$\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0 \qquad \Rightarrow a = b = 0$$

$$x^{2n} + x^n + 1 = (x^2 + x + 1)\, q(x) + (ax + b)$$

$$\varepsilon^{2n} + \varepsilon^n + 1$$

$3 \nmid n$

akkor

biztosan

$n = 3k + 1 \qquad 2n = 6k + 2 \qquad \varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$

$\varepsilon^{2n} = \varepsilon^2$

$\varepsilon^n = \varepsilon$

$n = 3k + 2$

$\varepsilon^{2n} = \varepsilon \qquad \varepsilon^n = \varepsilon^2 \qquad \Rightarrow \varepsilon + \varepsilon^2 = 0$

$x^2 + x + 1$

osztója

$x^{2n} + x^n + 1$

$3 \mid n$ $\qquad \varepsilon^{2n} = 1$

$\qquad\qquad \varepsilon^{n} = 1$

$1 + 1 + 1 = a\varepsilon + b$

nem lesz 0 a maradék.

$x^2 + x + 1 \mid x^{2n} + x^n + 1 \iff 3 \nmid n$

$f(x) = (x^2+1)\, q(x) + (x+1)$

$f(i) = ?$ $\qquad x = i$-re 0.

$x = i$ $\qquad \boxed{f(i) = i + 1}$

$\forall f \ \forall g \neq 0 \ \exists q$ és r $\qquad f = gq + r$

és $r = 0$ vagy $\operatorname{gr}(r) < \operatorname{gr}(g)$.

3 buktató: 1. $g \neq 0$ 2. $r = 0$ külön ki kell írni, mert a 0 pol-nak nincs foka.

3. CSAK TEST FÖLÖTT $\quad \mathbb{Z}$ fölött nem! $x : 2$ nem.

$x^{64} + x^{14} \equiv -x^{54} - 1 \quad (x^2+1)$

valid jelölés

$x^2 \equiv -1 \quad (x^2+1) \quad x^4 \equiv 1$

$x^{64} + x^{54} + x^{14} + 1 \equiv 1 - 1 + 1 - 1 = 0$

$x^{64} \equiv 1$

$1 \equiv 1$

$x^{54} \equiv -1$

$\underbrace{x^{52}}_{1} \cdot \underbrace{x^2}_{-1}$

$x^{14} = x^{12} \cdot x^2 \equiv -1$

azonos átalakítással is x^2+1 kiemelhető.

$3x + 4y = 1$ megoldható x, y egészre mert $(3,4) \mid 1$

$(x^2+1)\,p(x) + (x^3+1)\,q(x) = x$

$\exists\, p, q \in \mathbb{Q}[x]$ mert $(x^2+1, x^3+1) \mid 1 \mid x$.