A 5×5-ös $\det A = 5$ $\qquad \det(\underset{\overset{\|}{A+A}}{2A}) = ?$

$\forall$ sorból kiemelünk 2-t $\Rightarrow \underline{\underline{2^5 \cdot 5}}$.

$$\begin{vmatrix} a & a+d & a+2d & \cdots \\ b & b+e & b+2e & \cdots \\ c & c+f & c+2f & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{vmatrix}$$

Ötlet: Vonjuk ki a 2. oszlopból az első és harmadik oszlop felét

$\Rightarrow$ 2. oszlop csupa 0 lesz.

Valójában: 2. oszlop = 1. és 3. oszlop számtani közepe.

$\geq 3\times3$-asra is

$$\begin{bmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & k \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{matrix} 7 \mid a+b+c \\ 7 \mid d+e+f \\ 7 \mid g+h+k \end{matrix}\right\}$$

$\forall$ sort + az elsőhöz

$$\begin{vmatrix} 7x & 7y & 7z \\ & \text{egyéb} & \end{vmatrix} = 7 \begin{vmatrix} \text{egyéb} \end{vmatrix} \checkmark$$

$100\times \; + \; 10\times$

$\downarrow \; + \; \downarrow \; + \; \curvearrowright$

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 2 & 4 \\ 7 & 3 & 5 \end{vmatrix}$$

$147 = 100 \cdot 1 + 10 \cdot 4 + 7$

$7 \mid \boxed{147}$

$7 \mid \boxed{224}$

$7 \mid \boxed{735}$

$\Rightarrow 7 \mid \det$

becserélni a determinánsba.

Első oszlop 100-szorosát, a harmadikhoz adjuk.

2. — " — 10-szeresét

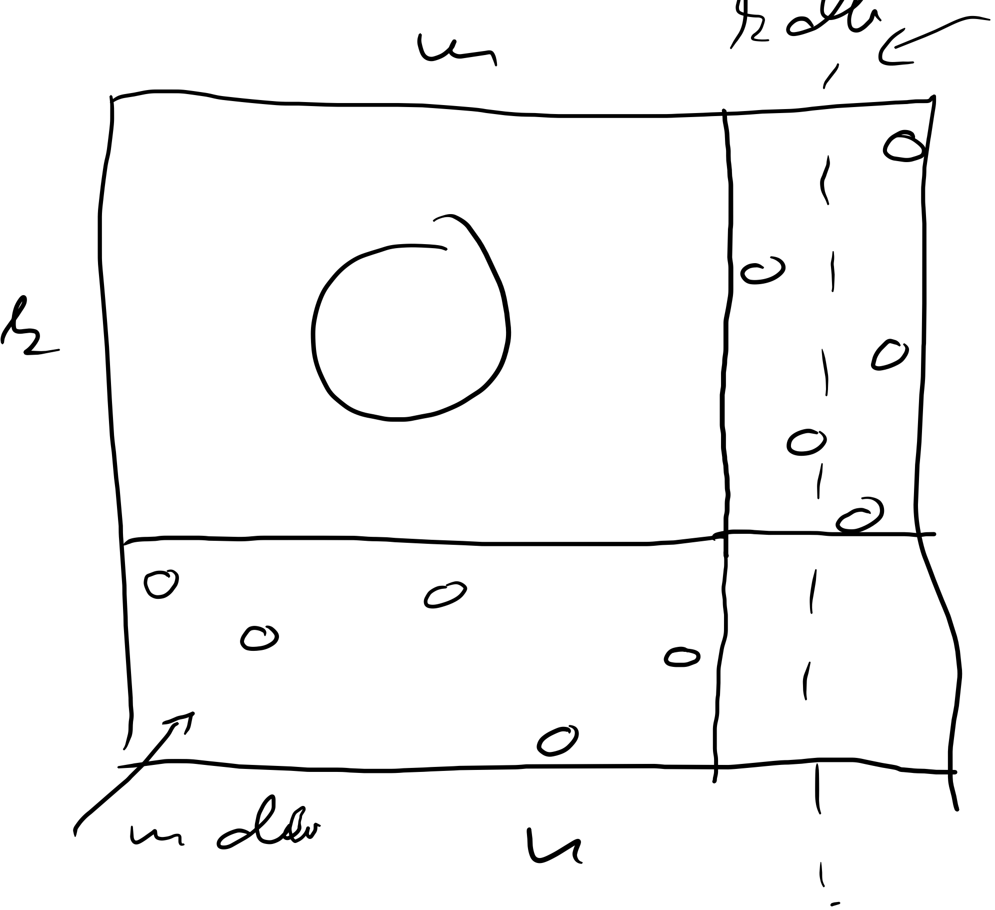
$$\begin{vmatrix} 1 & 147 \\ e & 224 \\ g & 735 \\ 9 & \end{vmatrix} = 7 \mid \text{egész} \mid \quad \checkmark$$

$n \times n$ es det $\exists$ téglalap $m \times k$ -as csupa 0

$m + k > n \Rightarrow \det = 0$

1. M.o. indukció. Ha van csupa 0 sor $\Rightarrow$ kész

Ha nem: $\exists$ oszlop, ami nem metszi a téglalapot.



oszlop szerint kifejtem!

∀ aldet-ban

lesz ≥ $k-1 \times m$-es téglalap

csupa 0

$k-1+m > n-1$

indukció ⇒ ezért az aldet-ok

mind 0.

II. mo. Det. def-ban egy tagot, az mindig belemegy-e a téglalapba.

∀ sorból és ∀ oszlopból veszünk egy elemet.

$m+k > n$ és n-et választ. k.

a_{ij} = i. sor j. eleme

a_{ij} elől
= det. i elől

$$\det|a_{ij}| = \sum_{f \in S_n} \mathrm{sg}(f)\, a_{f(1)1} \cdots a_{f(n)n}$$

↗ 1. alapsorá f(1)-ed
⋮
n " f(n)-ed.

f permutáció.

$a_{13}\, a_{22}\, a_{31}\, a_{44} =$
$= a_{31}\, a_{22}\, a_{13}\, a_{44}$ $\quad \boxed{-}$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ 3 db

$\boxed{32}$ $\boxed{31}$ ~~34~~
$\boxed{21}$ ~~24~~
~~14~~

$a_{13}\, a_{34}\, a_{41}\, a_{22}$ »
$a_{22}\, a_{41}\, a_{34}\, a_{13}$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ 4 db

$\boxed{42}$ $\boxed{41}$ $\boxed{43}$ $\quad \boxed{+}$
$\boxed{21}$ ~~23~~
~~13~~

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \boxed{a_{12}} = & \boxed{a_{13}} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} = & a_{23} & \boxed{a_{24}} & a_{25} \\ \boxed{a_{31}} & a_{32} = & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} = & a_{43} & a_{44} & \boxed{a_{45}} \\ a_{51} & \boxed{a_{52}} = & \boxed{a_{53}} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}$$

$$\begin{array}{ccccc} a_{13} & a_{24} & a_{31} & a_{45} & a_{52} \\ \| & \| & \| & \| & \| \\ a_{12} & a_{24} & a_{31} & a_{45} & a_{53} \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

) egy csere lesz $\Rightarrow$ ellentétes az előjel.

$x = -x \Rightarrow x = 0$

ANTISZIMM. mátrix

$$\begin{vmatrix} 0 & -a & -b \\ a & 0 & -c \\ b & c & 0 \end{vmatrix} = abc - abc = 0$$

(pl. SARRUS).

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 4$$

2×2-re nem igaz.

$\det M = \det M^T$ (tétel volt)

$M = -M^T$ $\quad \Rightarrow \quad \det(-M) = (-1)^3 \det M$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \overset{\parallel}{-1}$

$\det M = -\det(M) \Rightarrow \det M = 0$

$\boxed{n = \text{ptlan-ra jó}}$ # párosra nem. (példa)

---

18. $a_{ij} = \overline{a_{ji}} \Rightarrow \det$ valós

ugyanez a trükk.

---

⑨ $M \in \mathbb{Z}^{n \times n}$ $\quad M^{-1}$ mikor lesz $\in \mathbb{Z}^{n \times n}$

Válasz $\Leftrightarrow \det M = \pm 1.$

$\Rightarrow M^{-1}$ is egész $\quad M M^{-1} = E$

det szorzástétele $\quad \det M M^{-1} = \det E = 1$

$\overset{\parallel}{\underset{\text{egész}}{\det M}} \cdot \underset{\text{egész}}{\det(M^{-1})}$

$\Rightarrow \det M = \pm 1.$

$\Leftarrow \quad \det M = \pm 1$

M^{-1} képlete $\longrightarrow$ $\dfrac{1}{\det M}$ (előjeles aldet-ok transzponált mátrixa)

(fenti kifejtési tételből) $\quad \overset{\parallel}{\pm 1}$ $\quad$ M egész.

$\Rightarrow$ inverz egész.

---

*-os HF

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & & & 0 \\ 1 & 2 & 1 & & \\ & 1 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & & 1 & 2 \end{vmatrix} = a_n$$

$n \times n$

Ötlet: a_n-et a_{n-1} és a_{n-2}-vel kifejezni!

(első sor szerinti kifejtés)

Rekurziót megoldani.

TRIDIAGONÁLIS mátrix.

$$\left.\begin{aligned} x+y&=1 \\ x+2y&=2 \end{aligned}\right\}$$

CRAMER

M a mátrixa

$\underline{b}$ jobb oldali vektor

$$x_i = \frac{\det M_i}{\det M}$$

M-ben az i. oszlop helyére $\underline{b}$-t írjuk.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Csak működik
=> egyért. mo., ha $\det M \neq 0$
és fordítva is

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} = 0 \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} = 1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = M$$

M^{-1} első sor
2. eleme

$$M^{-1} = (\det(M))^{-1} \, ((A_{\underset{\sim}{ji}}))$$

megcserélve a két index (transzponálás)

A_{ij} az a_{ij}-hez tartozó előjeles aldet.

2. sor első eleméhez tartozó előjeles aldet!

$\det M = 1 \cdot 4 \cdot 6 = 24$ $\qquad -12/24 = \boxed{-1/2}$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = 12$$ előjel $\ominus$

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

Gyökök és együtthatók

$$ax^2 + bx + c = a(x-b_1)(x-b_2)$$

b_1, b_2 a gyökök

$$x^2 + b/a\,x + c/a = (x-b_1)(x-b_2) =$$

$$= x^2 - (b_1+b_2)x + b_1 b_2$$

$$b_1 + b_2 = -b/a$$
$$b_1 b_2 = c/a$$

$$(x-b_1)(x-b_2)(x-b_3) =$$

HF

$$x^3 - (b_1+b_2+b_3)x^2 + (b_1b_2 + b_1b_3 + b_2b_3)x - b_1b_2b$$

$$= x^3 + \frac{a_2}{a_3}x^2 + \frac{a_1}{a_3}x + \frac{a_0}{a_3}$$

$$b_1 + b_2 + b_3 = -a_2/a_3$$
$$b_1b_2 + b_1b_3 + b_2b_3 = a_1/a_3$$
$$b_1b_2b_3 = -a_0/a_3$$

$(x-b_1)(x-b_2)(x-b_3)(x-b_4)$

∀ zárójelből egyet kiveszünk

azokat szorozzuk

az összes ilyent összeadjuk.

x^4 ∀ zárójelből x

x^3 3 x és egy b_i $\ominus$ $-b_1-b_2-b_3-b_4=-\sigma_1$

x^2 2 x és 2 b_i $\oplus$ $b_1b_2+b_1b_3+b_1b_4+b_2b_3+b_2b_4+b_3b_4$ σ_2

x 1 x és 3 b_i $\ominus$ $-b_1b_2b_3-b_1b_2b_4-b_1b_3b_4-b_2b_3b_4$ σ_3

konst 0 x és 4 b_i $\oplus$ $b_1b_2b_3b_4=\sigma_4$

$a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$

$$\boxed{\begin{aligned}\sigma_1&=-\frac{a_3}{a_4}\\ \sigma_2&=\frac{a_2}{a_4}\\ \sigma_3&=-\frac{a_1}{a_4}\\ \sigma_4&=\frac{a_0}{a_4}\end{aligned}}$$

$$\boxed{\sigma_k=(-1)^k\frac{a_{4-k}}{a_4}}$$

n-edfokúra

$$\sigma_k=(-1)^k\frac{a_{n-k}}{a_n}$$

$2x^4 + 2x + 3$

gyökök négyzetösszege = ?

– " – reciprok összege = ?

összeg = ?

szorzat = ?

$\to a_0, a_1, a_2, a_3, a_4$

$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$

összeg   szorzat

$$\sigma_k = (-1)^k \frac{a_{4-k}}{a_4}$$

$a_0 = 3$

$a_1 = 2$

$a_2 = 0$

$a_3 = 0$

$a_4 = 2$

$\sigma_1 = -0/2 = 0$

$\sigma_2 = 0/2 = 0$

$\sigma_3 = -2/2 = -1$

$\sigma_4 = 3/2$

$$b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + b_4^2 =$$

$$\frac{1}{e_1} + \frac{1}{e_2} + \frac{1}{e_3} + \frac{1}{e_4} =$$

$$= \frac{b_2b_3b_4 + b_1b_3b_4 + b_1b_2b_4 + b_1b_2b_3}{b_1b_2b_3b_4} = \frac{\sigma_3}{\sigma_4} = \boxed{-2/3}$$

$$\Big(\underbrace{b_1 + b_2 + b_3 + b_4}_{\sigma_1}\Big)^2 = \underbrace{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + b_4^2}_{\parallel} + 2\sigma_2$$

négyzetösszeg = $\boxed{\sigma_1^2 - 2\sigma_2}$ $\leftarrow$ a feladatra

$= 0^2 - 2\cdot 0 = \underline{\underline{0}}$

HF 11, 13, 12 most

x^3+3x+1 gyökei a, b, c

Kell olyan 3.fokú : gyöke
$$\left\{\begin{array}{l} a^2, b^2, c^2 \\ a+c, b+c, a+b \quad \text{HF} \\ a+b+c,\ ab+ac+bc,\ abc \quad \text{kifejezhető} \end{array}\right.$$

$(x-a)(x-b)(x-c)$

Kell: $(x-a^2)(x-b^2)(x-c^2)=?$

$$= x^3-(a^2+b^2+c^2)x^2+(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)x-a^2b^2c^2$$

HF

könnyű

$M^T=-M$ 3×3 $M=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$

$\det M = 0$

∀ sorból -1-et kiemelünk

$$\det(-M) \overset{\det}{=} \begin{pmatrix} -a & -b & -c \\ -d & -e & -f \\ -g & -h & -i \end{pmatrix} = (-1)^3 \det M.$$