A Ábel $|A|=80$, nincs 8 rendű elem.

Alaptétel: $\forall$ véges Ábel-csoport egyértelműen előáll prímhatvány rendű ciklikus csoportok direkt szorzataként.

$80 = 5\cdot 16 = 5\cdot 8\cdot 2 = 5\cdot \underbrace{4\cdot 4 = 5\cdot 4\cdot 2\cdot 2}$ $= 5\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2$.

prímhatványok szorzatára — nem izomorf, mert 2-esből 2 db, 0 db van.

5 db 80 rendű Ábel-csoport van.

$o(g)=8$ $o(g)$ = komponensek rendjeinek lkkt-je.

$\Downarrow$ prímhatvány $\Longleftrightarrow$ $\exists$ 8 rendű komponens.

$\mathbb{Z}_{16}^+$-ban $o(2)=8$ faktorban nincs (Lagrange)

$\mathbb{Z}_8^+$-ban $o(1)=8$ G véges ciklikus: $\forall d \mid |G|$-re $\exists$ d rendű elem ($\varphi(d)$ db).

Eredmény: 3-féle: $(4,4,5)$, $(2,2,4,5)$, $(2,2,2,2,5)$.

$10\cdot 2\cdot 4 = 80$ jó, de nem új, $\cong 5\cdot 2\cdot 2\cdot 4$ $\mathbb{Z}_{nk}^+ \cong \mathbb{Z}_n^+ \times \mathbb{Z}_k^+$ $(n,k)=1$.

balideál L R gyűrűben

Részcsoport

$r \in R$, $a \in L \Rightarrow ra \in L$

J jobbideál: $ar \in J$

Ideál = bal és jobb ideál.

Komm, 1-elemes R $(a) =$ a többszörösei

Pl $R = \mathbb{Z}$ $a = 2$ $(2) =$ páros számok.

$$X = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b \in T \right\}$$

balideál-e, jobbideál-e?

$(a, b) =$ a legszűkebb a-t és b-t tartalmazó ideál

1-elemes, komm gyűrűben (R) ez $\{ax + by \mid x, y \in R\}$

$\mathbb{Z}[x]$

$(2, x)$, $(x+1, x+2)$, $(2x+2, x+4)$ főideál-e?

$\overset{?}{=} (p)$

$p \mid 2 \Rightarrow p = \pm 1, \pm 2$ $\quad$ $p = \pm 1$ $\quad$ $(p) = \mathbb{Z}[x]$

$p \mid x \Rightarrow p = \pm 1, \pm x$ $\quad$ De $(2, x) \neq \mathbb{Z}[x]$!

$\Rightarrow (2, x)$ NEM főideál

$(2,x) \neq \mathbb{Z}[x]$

$I = \{ q \in \mathbb{Z}[x] \mid q(0) \text{ páros} \}$ ideál

q konstans tagja

$(\dots + ps)(\dots + c) =$ konstans tag cs lesz, ami páros

$\quad c \in \mathbb{Z}$

$2, x \in I \Rightarrow (2,x) \subseteq I \neq \mathbb{Z}[x]$

$1 \notin I$ nem páros a "konstans tagja"

$$\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \quad \text{IGEN}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ar & * \\ * & * \end{pmatrix} \quad \text{NEM}$$

Pl. $\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\in I}\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\in R} = \begin{pmatrix} 1 & \\ & \end{pmatrix} \notin I$.

$(x+1,\ x+2)$ főideál-e $\mathbb{Z}[x]$-ben.

$(2x+2,\ x+4)$

$(x+1,\ x+2) = I$

$(x+2) - (x+1) = 1 \in I$

$p \in \mathbb{Z}[x] \Rightarrow p = p \cdot 1 \in I$ $\qquad I = \mathbb{Z}[x] = (1)$

IGEN

$= (p)$ $\qquad p \mid 2x+2 \Rightarrow$

$p \mid x+4 \Rightarrow \pm 1,\ \pm(x+4)$ $\qquad \pm 1 \mid 2x+2$, $\quad x+4 \nmid 2x+2$

irred $\mathbb{Z}[x]$-ben

(irred $\mathbb{Q}[x]$-ben és primitív)

ekkor $(2x+2,\ x+4) = 1$ Ha főideál $\Rightarrow p = \pm 1 \Rightarrow$

$(2x+2,\ x+4) = \mathbb{Z}[x]$ lenne.

De nem, mert $(2x+2,\ x+4) \subseteq$ páros konstans tagúak $\subsetneq \mathbb{Z}[x]$

$H = (2, x)$.

HF VI/3,4 előzetes.

Faktorgyűrű: Faktorcsoport +-ra, lehet szorozni is.

I ideál R-ben $\quad R^+/I$ faktorcsoport.

$r+I$ (NEM rI!!)

$(r+I)+(s+I) = r+s+I$

$(r+I)(s+I) = rs+I$

Főpélda: mod n maradékosztályok: $\mathbb{Z}/(n)$.

PL $\quad \mathbb{Z}/(2) \quad \emptyset+I=O$ páros számok $\quad$ 0 maradékúak

$\quad$ "I" $\quad 1+I=E$ páratlan " $\quad$ 1 $\quad$ " $\quad$ "

+	O	E
O	O	E
E	E	O

+	O	E
O	O	O
E	O	E

$O+E = (\emptyset+I)+(1+I) = 1+I = E$

$\underbrace{(1+I)}_{E}\cdot\underbrace{(1+I)}_{E} = 1+I$

$R/I \quad$ „I elemeiből nullát csinálunk"

VII/5 $\mathbb{Z}_4/\{0\}$, $\mathbb{Z}_8/\{0,4\}$, $\mathbb{Z}_{16}/\{0,4,8,12\}$

$2\mathbb{Z}_{16}/(8)$

$\mathbb{Z}_{16}$ páros elemei (8 ahol).

$\mathbb{Z}_4/\{0\}$

$0+\{0\} = \{0\}$
$1+\{0\} = \{1\}$
$2+\{0\} = \{2\}$
$3+\{0\} = \{3\}$

Nyilván $\mathbb{Z}_4$-gyel izomorf

$\mathbb{Z}_4$:

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

*	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

$\mathbb{Z}_8/\{\emptyset,4\} \subset I$

$\emptyset + \underline{I} = \{\emptyset,4\} = 4+\underline{I} = 0$ nullelem
$1+\underline{I} = \{1,5\} = 5+\underline{I} = E$ egységelem
$2+\underline{I} = \{2,6\} = 6+\underline{I} = A$
$3+\underline{I} = \{3,7\} = 7+\underline{I} = B$

Pl. $AB = (2+\underline{I})(3+\underline{I}) = 6+\underline{I} = A$

$A+B = (2+\underline{I})+(3+\underline{I}) = 5+\underline{I} = E$

$\emptyset \leftrightarrow 0$, $1 \leftrightarrow E$, $2 \leftrightarrow A$, $3 \leftrightarrow B$ izomorfizmus

+	0	E	A	B
0	0	E	A	B
E	E	A	B	0
A	A	B	0	E
B	B	0	E	A

*	0	E	A	B
0	0	0	0	0
E	0	E	A	B
A	0	A	0	A
B	0	B	A	E

$\mathbb{Z}_{16} / \{0, 4, 8, 12\} = I$ HF: VII/5 kiss. gyűrűje modulo ideál(?)

$0 + I = \{0, 4, 8, 12\} \longleftrightarrow 0$
$1 + I = \{1, 5, 9, 13\} \longleftrightarrow 1$
$2 + I = \{2, 6, 10, 14\} \longleftrightarrow 2$
$3 + I = \{3, 7, 11, 15\} \longleftrightarrow 3$

$\cong \mathbb{Z}_4$ ez is.

$2\mathbb{Z}_{16} / (8)$ $(8) = \{0, 8\} = I$.
↳ $\{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\}$

$0 + I = \{0, 8\} = 0$
$2 + I = \{2, 10\} = x$
$4 + I = \{4, 12\} = y$
$6 + I = \{6, 14\} = z$

+	0	x	y	z
0	0	x	y	z
x	x	y	z	0
y	y	z	0	x
z	z	0	x	y

*	0	x	y	z
0	0	0	0	0
x	0	y	0	y
y	0	0	0	0
z	0	y	0	y

$x^2 = 2 \cdot 2 + I = y$
$y^2 = 4 \cdot 4 + I = 0$
$xy = 2 \cdot 4 + I = 0$
$xz = 2 \cdot 6 + I = y$
$yz = 4 \cdot 6 + I = 0$
$z^2 = 6 \cdot 6 + I = y$
$36 \bmod 16 = 4 \in y$

$\cong$-e $\mathbb{Z}_4$-gyel??

NEM! 2-féle szorzat: 0, y
$\mathbb{Z}_4$-ben 4-féle szorzat
$\mathbb{Z}_4$ 1-elemes, ez nem.