$\mathbb{Z}_2^+ \times \mathbb{Z}_4^+$ 4 rendű elemei

$o((a, b)) = \text{lkkt}[o(a), o(b)]$

$\mathbb{Z}_2^+$	rend
0	1
1	2

$\mathbb{Z}_4^+$	rend
0	1
1	4
2	2
3	4

$o(b)$ csak 4 lehet

$o(a)$ mindegy

$(0,1), (0,3), (1,1), (1,3)$

$\mathbb{Z}_2^+ \times \mathbb{Z}_2^+ \times \mathbb{Z}_4^+ \not\cong \mathbb{Z}_4^+ \times \mathbb{Z}_4^+$

2 rendű hány van?

7 db

$(a, b, c) \in$

$\in \{0,1\} \times \{0,1\} \times \{0,2\}$

kivéve $(0,0,0)$

$[o(a), o(b)] = 2$

$0, \cancel{1}, 2, \cancel{3}$ -ból

$\cancel{(0,0)}$, $\underbrace{(0,2), (2,0), (2,2)}_{3 \text{ db}}$

1 rendű

6, 8, 16 rendű Abel

$6 = 2 \cdot 3$ $\qquad \mathbb{Z}_2^+ \times \mathbb{Z}_3^+$ $\qquad$ 1 db

$8 = 8 = 4 \cdot 2 = 2 \cdot 2 \cdot 2$

$\mathbb{Z}_8^+ \qquad \mathbb{Z}_4^+ \times \mathbb{Z}_2^+ \qquad (\mathbb{Z}_2^+)^3$

$16 = 16 = 8 \cdot 2 = 4 \cdot 4 = 4 \cdot 2 \cdot 2 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$

5 db

---

16 elemű Abel van, amelyben nincs 4 rendű?

$\Rightarrow$ $\forall$ elem 1 vagy 2 rendű

csak a $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ jó. $\qquad$ 1 db

$G \cong A \times B$ $\qquad$ Készítünk $\qquad$ $N \lhd G$, $K \lhd G$

$N \cap K = \{1\}$ $\qquad NK = G$

$N \cong A$, $\quad K \cong B$.

$\mathbb{Z}_6^+$, $\mathbb{Z}_8^+$, $\mathbb{Z}^+$, $\mathbb{Q}^+$, $\mathbb{C}^+$,

$\mathbb{Z}_{15}^\times$, $\mathbb{Z}_{16}^\times$

$\to$ véges elég $|N| \cdot |K| = |G|$.

$\mathbb{Z}_6^+$

2 elemű: N $\quad \{0,3\} \cong \mathbb{Z}_2^+$

3 elemű: K $\quad \{0,2,4\} \cong \mathbb{Z}_3^+$

$2 \cdot 3 = 6$ ✓ $\qquad N \cap K = \{0\} \implies \mathbb{Z}_6^+ \cong \mathbb{Z}_2^+ \times \mathbb{Z}_3^+$

$\mathbb{Z}_8^+$ részcsoportjai

$\{0\}$, $\{0,4\}$, $\{0,2,4,6\}$, egész $\mathbb{Z}_8^+$

nem lehet $\qquad$ nem jó: a többiek $\ni 4$

($\mathbb{Z}_8^+ = \{0\} \times \mathbb{Z}_8^+$ triviális felbontás)

---

nem $\mathbb{Z}^+$ $\qquad$ K, N egyik se $\{0\}$ $\quad | \quad 0 \neq a \in K$, $b \in N$ $\; b \neq 0$ $\qquad K \cap N \ni ab \neq 0$

nem $(\mathbb{Q}^+)$ HF

$\mathbb{C}^+$ $\quad N =$ valósak $\quad K =$ tiszta képzetes $\quad$ jó $\quad \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$

$\mathbb{Z}_{15}^{\times}$

||2 (Tétel)

$\mathbb{Z}_3^{\times} \times \mathbb{Z}_5^{\times} \cong \mathbb{Z}_2^{+} \times \mathbb{Z}_4^{+}$

$((3,5)=1)$

2 4 elemű

$N \triangleleft \mathbb{Z}_{15}^{\times}$ $|N|=4$

$K \triangleleft \mathbb{Z}_{15}^{\times}$ $|K|=2$

$o(2) = \cancel{?}\ 4$ $2, 4, 8, 16 \equiv 1$

Kell: 2 rendű elem K-ba

4 is jó $-1 \equiv 14$

$|\mathbb{Z}_{16}^{\times}| = 8$ $\varphi(16)=8$

$2 \cdot 4$?

$o(3) = \cancel{?}\ 4$

$3, 9, 27 \equiv 11, 33 \equiv 1$

$K = \{1, 3, 9, 11\}$

$N = \{1, 15\}$

4

$N = \{1, 2, 4, 8\}$

$K = \{1, 14\}$

S_3 összes rszp: $\{id\}, S_3$

nem! $|N|=2$ $A_3 = \langle (123) \rangle$ $\{id, (ab)\}$ ← ho

$|K|=3$ $K=A_3$ jó $A_3 \triangleleft S_3$ 2 indexű 3-féle (volt).

Normálosztó keresése.

G hat G-n konjugálással

$g * x = g x g^{-1}$ orbit = konj. osztály

$N \triangleleft G \iff$ rcsp és konj osztályok U-ja.

S_3 konj osztályai?

1. válasz: egyforma ciklusszerkezet!

$\{id\}$, $\{(123), (132)\}$

$\{(12), (13), (23)\}$ $\Rightarrow$ $\{id, (12)\}$ nem no.

2. válasz. X stabilizátora: $g * x = x$

$g x g^{-1} = x \iff gx = xg$ x CENTRALIZÁTORA (rcsp.)

S_3: id cent S_3 $\Rightarrow$ id osztálya $6/6 = 1$ elemű.

(123) cent rcsp, benne van $id, (123), (123)^2 = (132)$

de (12) nincs $(12)(123) \neq (123)(12)$ $\Rightarrow$ 3 elemű $\Rightarrow A_3$

$\Rightarrow$ konj oszt. 2 elemű.

$C((12)) \ni id, (12)$

↗ centralizátor

rendje ≥ 2

osztható 2-vel

< 6 mert (123) nincs benne

$\Rightarrow$ 2 elemű.

$\Rightarrow \{id, (12)\}$

(12) osztálya $6/2 = 3$ elemű

azaz a 3 csere lesz.

id	$(123), (132)$
$(12), (13), (23)$	

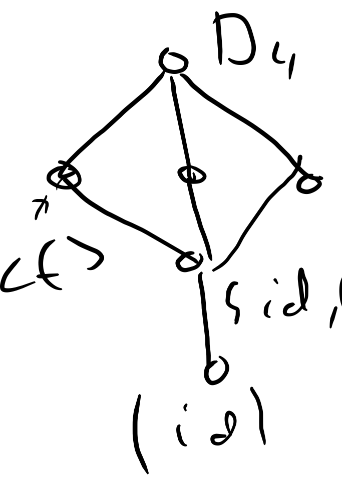
D_4 konj. osztályai

$\Rightarrow$ vannak:

$1, f, f^2, f^3$

t, tf, tf^2, tf^3

D_4	id	centr	D_4
	f	centr $\ni 1, f, f^2, f^3$, de t nem $\Rightarrow \{1, f, f^2, f^3\}$	
	f^2	$\rightsquigarrow$ $f^2 t = t f^{-2} = t f^2$ (ld. tiszt.) $\Rightarrow$	D_4
	f^3		
	t	centr $\ni 1, t, f^2$ (!!!), de f nem	
	tf	$\Rightarrow$ csak 4 elemű lehet	
	tf^2	$\Rightarrow C(t) = \{1, t, f^2, tf^2\}$	
	tf^3	$\Rightarrow$ 2 elemű osztály	



nem direkt összeg f^2 miatt.

$= 8/4$

1	f	f^2	f^3
t	tf	tf^2	tf^3

$t f t^{-1} = t f t = t^2 f^{-1} = f^{-1}$

f és f^{-1} konjugáltak.

f osztálya 2 elemű

$\Rightarrow \{f, f^{-1}\}$ osztály

$f t f^{-1} = t f^{-1} f^{-1} = t f^{-2} = t f^2$

$\{t, tf^2\} \Rightarrow \{tf, tf^3\}$

$N \triangleleft D_4$

rcsp. és osztályok U-ja.

$N = \{id\}$, $N = D_4$, $N = \{1, f, f^2, f^3\}$ is (2 indexű)

$N = \{id, f^2\}$ is, $N = \{id, f^2, t, tf^2\}$ is $N = \{id, f^2, tf, tf^3\}$ is

Kvaternió csoport Q

$\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k$ $\qquad i^2 = j^2 = k^2 = -1$

$ij = k \qquad ji = -k$

$jk = i \qquad kj = -i$

$ki = j \qquad ik = -j$

rész, komp. alább, normálosztó? Direkt felbontás?

1	i	j	k
-1	$-i$	$-j$	$-k$

$o(1) = 1$, $o(-1) = 2$

többi elem rendje 4

nincs direkt felbontás.

$C(1) = C(-1) = Q$

$C(i) = \langle i \rangle$.

i cntzfa 2 elem.

Ψ: i, i^2, i^3, i^4

$i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$

nincs benne j.

rész $1, 2, 4, 8$

$\{1\}$ $\quad \{1, -1\}$ $\quad Q$

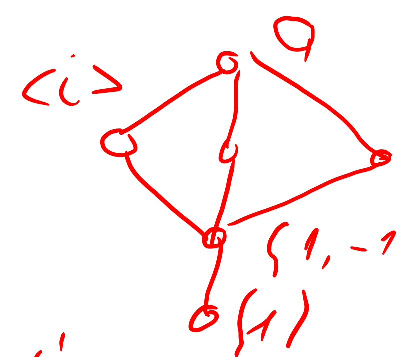
$\langle i \rangle = \{1, i, -1, -i\}$

$\langle j \rangle$

$\langle k \rangle$

$j i j^{-1} = -k(-j) = kj = -i$

$\{i, -i\}$



$\forall$ rész normálosztó.

A_4

$\{id\}$

$1+3+4+4=12$
ankág elemek

rend:
1
2
1+3

$\{id, V\}$

$\{(12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$

8 háromciklus. ???? Ez 2 db 4 elemű oszt.

$8 \nmid 12$

S_4-ben konjugáltak, de ha csak páratlannal lehet átkonjugálni, akkor az A_4-ben már nem konjugáltak!

$f \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

$f(1)=1$
$f(2)=2$
$f(3)=4$
$f(4)=3$

ptlan
nem is

$g(1)=2, g(2)=4, g(3)=1, g(4)=3$
(1243) ptlan.

$C((123)) = ?$
$= \langle (123) \rangle$

$(123), (123)^2, id$
3 db

direkt felb. nincs. | (123) osztálya 4 elemű.

osztója 12-nek
3, 6, 12
↑ kizárható.

HF A_5 egyszerű 60 elem.

kézi ortfoldat is.

id (123)

(12345) $(12)(34)$ melyik hány rendű?