Lineáris egyenletrendszer ← ismeretlenek nincsenek összeszorozva
nincs x^2, y^2

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 2 \\ x + 2y &= 3 \end{aligned}\right\}$$

Gauss-elimináció

2. egyenletből kivonjuk az elsőt. ← "elimináltuk" x-et

$y = 1$ lesz $\Rightarrow$ $x = 1$ az első egyenletből.

$$0.\quad \begin{array}{cc} x & y \end{array} \qquad \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{array}\right]$$

A 2. sort − az 1.-ből

$$\left[\begin{array}{cc|c} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{cc} x & y \end{array} \qquad \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Az 1. sort kivonjuk a 2.-ból
2x-et

1. Veszünk nem 0 elemet a mátrix bal oldalán, olyat, amivel a sorában és oszlopában nincs karika. és karikázzuk be.
2. A karikázott elemmel végigosztjuk a sorát ⇝ 1 VEZÉREGYES
3. A karikázott 1 segítségével kinullázzuk az alatta és felette levő számokat úgy, hogy a karikázott 1-es sorának alkalmas számszorosát kivonjuk a többi sorból.

STOP: nem tudunk karikázni

$0 \cdot x + 1y = 1$
$1 \cdot x + 0y = 1$ $\quad x = 1, y = 1$ kész.

$$\begin{aligned} x + y &= 2 \\ x + 2y &= 3 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} y &= 2 - x \\ y &= 3/2 - x/2 \end{aligned}$$

két metsző egyenes

A metszéspont határozza meg.

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 2 \\ 2x + 2y &= 3 \end{aligned}\right\}$$

nincs megoldás

(2x + 2y 4 kellene, hogy legyen)

Két párhuzamos egyenes, nincs metszéspont.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cc} x & y \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{array}\right] \end{array} \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

STOP

először 2x-esét kivonjuk a 2.-ból

$$\begin{aligned} x + y &= 2 \\ \boxed{0 = -1} \end{aligned}$$

ellentmondás

nincs megoldás.

TILOS SOR: a bal oldala végig 0, a jobb oldal nem.

Ha $\exists$ tilos sor $\Rightarrow$ ellentmondás.

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 2 \\ 2x + 2y &= 4 \end{aligned}\right\}$$

Két egybeeső egyenes.

∞ sok megoldás.

Képletet keresünk az általános megoldásra

$$\begin{array}{cc} x & y \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{array}\right] \qquad x+y=2$$

STOP

első sor 2x-esét
kivonni a 2.-ból

CSUPA 0 sor: kihagyható

Van-e olyan megoldás, ahol $y=0$? $x=2$
$y=23$? $x=-21$
$y=r$? $x=2-r$

$\forall\, y$-hoz van egy jó x

y SZABADON választható, x KÖTÖTT, a szabad y-tól kifejezhető.

SZABAD ismeretlen: oszlopában nincs (1)
KÖTÖTT — " — : — " — VAN

Ált. megoldás: $(x,y) = (2-y,\, y)$ y tetszőleges.

Ellentmondásos $\Leftrightarrow$ 0 db megoldás $\Leftrightarrow$ VAN TILOS SOR
Egyértelmű $\Leftrightarrow$ 1 db — " — $\Leftrightarrow$ nincs TILOS sor
nincs szabad.

Példa
$$\left.\begin{array}{r} x+y=1 \\ 2x+2y=2 \\ y=1 \end{array}\right\} \quad \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$(x,y) = (0,1)$
egy megoldás

$$
\begin{aligned}
2x - 3y + 6z &= 14\\
-3x + 2z &= 3\\
x - 6y + 14z &= 31
\end{aligned}
$$

Ha 1-est lehet kapni, akkor azt tegyük, hogy ne legyenek törtek.

$$
\begin{array}{ccc}
x & y & z
\end{array}
\left[\begin{array}{ccc|c}
2 & -3 & 6 & 14\\
-3 & 0 & 2 & 3\\
1 & -6 & 14 & 31
\end{array}\right]
\sim
\left[\begin{array}{ccc|c}
0 & 9 & -22 & -48\\
0 & -18 & 44 & 56\\
1 & -6 & 14 & 31
\end{array}\right]
\sim
$$

első sorból kivonjuk a 3. sor 2-szeresét
2. sorhoz hozzáadjuk a 3. sor 3-szorosát

első sort 9-cel elosztjuk
18 x-át a másodikhoz adjuk
6 x-át a harmadikhoz

$$
\begin{array}{ccc}
x & y & z
\end{array}
\left[\begin{array}{ccc|c}
0 & 1 & -22/9 & -48/9\\
\cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0}\\
1 & 0 & -2/3 & -1
\end{array}\right]
$$

$$6\cdot\left(\frac{-22}{9}\right)+14 = \frac{-44+42}{3}$$

$$6\left(\frac{-48}{9}\right)+31 = -32+31$$

STOP

SZABAD: z
KÖTÖTT: x, y

$z \in \mathbb{R}$

$$y - \frac{22}{9}z = -\frac{48}{9}$$

$$x - \frac{2}{3}z = -1$$

$$(x, y, z) = \left(-1 + \frac{2}{3}z,\ -\frac{48}{9} + \frac{22}{9}z,\ z\right)$$

végt. m.o. 3 db kötős változóval

Ell: visszahelyettesítve

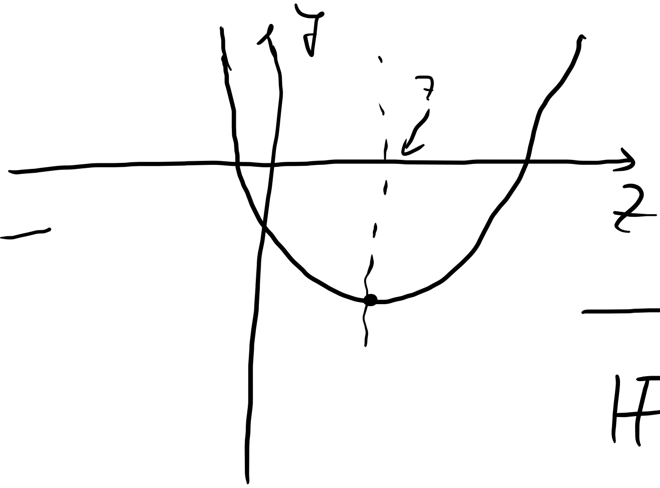
$$2x - 3y + 6z = 14$$

$$2\left(-1 + \tfrac{7}{3}z\right) - 3\left(-\tfrac{48}{9} + \tfrac{22}{9}z\right) + 6z \stackrel{?}{=} 14$$

AZONOSSÁG? (kiesik-e z) HF.

$\min \; x^2 + y^2 + z^2$ (mert az egyenes legközelebbi pontja (0,0,0)-hoz)

$$\left(-1 + \tfrac{7}{3}z\right)^2 + \left(-\tfrac{48}{9} + \tfrac{22}{9}z\right)^2 + z^2 \quad \min?$$

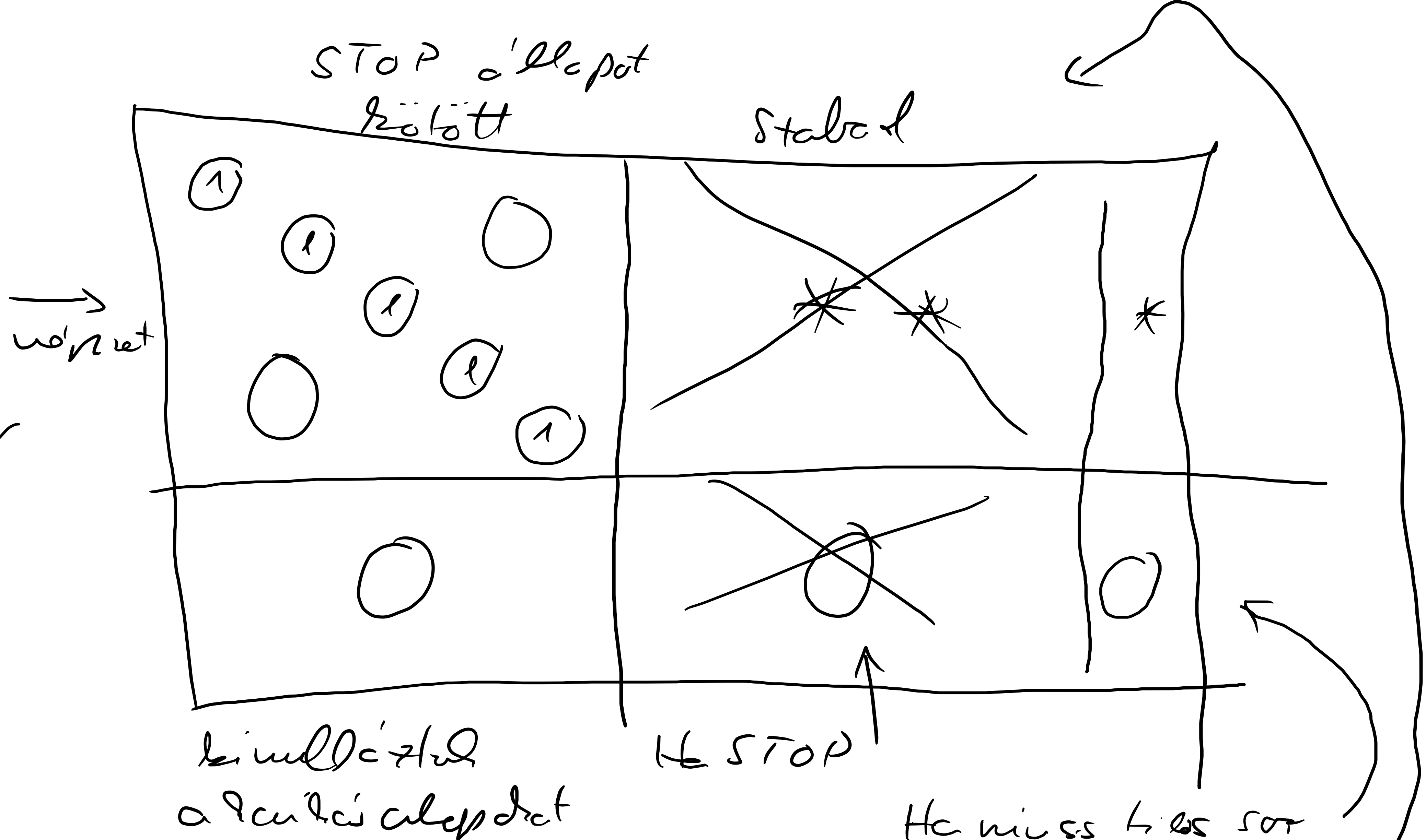


$y = az^2 + bz + c$

min $z = -b/2a$ -nál.

HF $\exists$-e olyan megoldás, ahol x, y, z egész?

	m.o. sz. $t=0$	m.o. $t=1$	$t=\infty$	
ism < egy	$\left.\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \end{array}\right\}$	$\left.\begin{array}{l} x=0 \\ 2x=0 \end{array}\right\}$	$\left.\begin{array}{l} x+y=0 \\ x+y=0 \\ x+y=0 \end{array}\right\}$	
ism = egy.	$\left.\begin{array}{l} x+y=0 \\ x+y=1 \end{array}\right\}$	$x=0$	$\left.\begin{array}{l} x+y=0 \\ x+y=0 \end{array}\right\}$	$\left[\begin{array}{cc\|c} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$
ism > egy.	$x+y+z=0$ $x+y+z=1$	Nem!	$x+y=0\}$	
		Ha lesz is az, egzakt => nem egyértelmű a m.o.		$\left.\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \end{array}\right\}$



Ha ezért a megoldás => nincs stabil

=> Sa ≥ alapk. Qed.