$x^3-7x+6=0$

$x=1$ jó.

$$x^3-7x+6 = x^2(x-1)+x^2-7x+6=$$
$$= x^2(x-1)+x(x-1)+x-7x+6=$$
$$= x^2(x-1)+x(x-1)-6(x-1)=$$
$$= \underbrace{(x-1)}_{=0}\underbrace{(x^2+x-6)}_{=0}=0$$

$\rightsquigarrow$ 2. fokú egyenlet.

HORNER $f(x)=1\cdot x^3 \underset{0\cdot x^2}{} -7x+6$

	1	0	-7	6
$x=1$	1	$1\cdot 1+0 = 1$	$1\cdot 1-7 = -6$	$1(-6)+6 = \underline{\underline{0}}$

$x-1$ gyöktényező!

$\underline{\underline{x^2+x-6}}$.

$\leftarrow$ $x=1$ gyöke f-nek

		b
$x=u$	a	$u\cdot a+b$

$f(x) = x^6 - 4x^4 + x^3 - x^2 + 4$

$x = 2$

$f(2) = 8$

	1	0	−4	1	−1	0	4
x=2	1	2	0	1	1	2	$\underline{\underline{8}}$

$g(x) = x^5 + 2x^4 + x^2 + x + 2$

$f(x) = g(x)(x-2) + \underbrace{8}_{= f(2)}$

HF 13

---

17. $f(x) = x^4 - x^3 - x + 1$ $\quad x = 1$

$x-1$ -et kétszer lehet kiemelni

	1	−1	0	−1	1
x=1	1	0	0	−1	$\underline{\underline{0}}$
x=1	1	1	1	$\underline{\underline{0}}$	
x=1	1	2	$\underline{\underline{3}} \neq 0$		
x=1	1	$\underline{\underline{3}}$			
x=1	$\underline{\underline{1}}$				

$(x-1)(x^3-1)$

$(x-1)^2(x^2+x+1)$

Iterált HORNER

Az aláhúzott mód

$h(x) = x^4 + 3x^3 + 3x^2$

$h(x-1) = f(x)$ HF

$(x-1)^2(x^2+x+1)$

$\nearrow$ 2-szeres gyöke az 1

<u>Áll.</u> $f(x)=(x-u)^n g(x)$ ahol $g(u)\neq 0$
akkor f-nek az u n-szeres gyöke.

x^2+2x+1

$\| $

$(x+1)^2=(x-(-1))^2$

$$\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\cdot 1}}{2} = -1$$

$\nearrow = 0$

2-szeres gyök

18. $f(x)$ fok 1640

1 10-szeres gyök
-1 20-szoros

$(x-1)^{10}(x+1)^{20}\cancel{(x-1)}^{1640-20-10}$ jó?

$\times$ $1640-20-10$

19. f-nek 5-szörös gyöke 1 $f+g$-nek
g-nek 6-szoros $f+g+fg$-nek hányszoros?

$$f(x) = (x-1)^5\, u(x) \qquad u(1) \neq 0$$
$$g(x) = (x-1)^6\, v(x) \qquad v(1) \neq 0$$

$$f(x) + g(x) = (x-1)^5 \Big[\underbrace{u(x) + (x-1)\, v(x)}\Big]$$

$f+g$-nek 5-szörös

kiemelhető-e további $x-1$-et? Azaz gyöke-e az 1?

$x=1 \qquad \underset{\neq 0}{u(1)} + (1-1)\, \underset{= 0}{v(1)}$

$$f(x)g(x) = \\ = (x-1)^{5+6}\, \underbrace{u(x)\, v(x)}_{1 \text{ nem gyök}: \ u(1)v(1) \neq 0.}$$

11-szeres.

f-nek k-szoros $\Rightarrow$ fg-nek $k+m$-szeres.
g-nek m-szeres

$f+g$-nek $\Rightarrow$ $\min(k,m)$-szeres, ha $k \neq m$

2-ből általánosítás

Ha $k = m$: $\geq k$-szoros.

$$\underbrace{\underbrace{f+g}_{5} + \underbrace{fg}_{11}}_{5\text{-szörös}}$$

$2x^3+3x+5$ rac. gyökök?

x^3-7x+6 egész gyökök?

$n^3-7n+6=0$ n egész.

$n^3-7n=-6$

$n(n^2-7)=-6 \Rightarrow \underline{\underline{n \mid 6}}$

$n=\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$

$n \mid ab$
$(n,a)=1$ $\Rightarrow \underline{\underline{n \mid a}}$

egész gyökök: $2x^3+3x=-5 \Rightarrow x \mid 5$ (x egész)

$x=\frac{p}{q}$ $(p,q)=1$ $\quad 2\frac{p^3}{q^3}+3\frac{p}{q}=-5$

$2p^3+3pq^2=-5q^3$ $\quad p \mid -5q^3 \Rightarrow$

$(p,q)=1$ $\quad \underline{\underline{p \mid 5}}$

$2p^3=-3pq^2-5q^3$ $\Rightarrow q \mid 2p^3$ $(p,q)=1$ $\Rightarrow \underline{\underline{q \mid 2}}$

$a_n x^n + \dots + a_0 \Rightarrow p \mid a_0$, $q \mid a_n$

p/q gyöke $(p,q)=1$

RAC. GYÖKTESZT

$2x^3 + 3x + 5$

$p \mid 5$ $\quad p = \pm 1, \pm 5$

$q \mid 2$ $\quad q = \pm 1, \pm 2$

$p/q = \boxed{\pm 1, \pm 5, \pm 1/2, \pm 5/2}$

behelyettesítés (HORNER)

$x = -1$

	2	0	3	5
$x=-1$	2	-2	5	0

$2x^2 - 2x + 5$ 2. fokú

$x = -1$

HF gyakorló 26

$f(x)$ egész együtthatós (Rac. együtthatós van!)

(*)
$$\left.\begin{array}{l} f(10) = 400 \\ f(14) = 440 \\ f(18) = 520 \end{array}\right\}$$
$\exists$-e ilyen f?

nincs f!

$\Rightarrow f(x) - 400 = (x-10)\,g(x)$

gyöke a 10

g is egész együtthatós!

$f(x) = (x-10)\,g(x) + 400$ (HORNER)

[$f(x) = (x-14)\,h(x) + 440$] is, de ...

...

$f(14) = (14-10)\,g(14) + 400$

$440 \Rightarrow 40 = 4g(14) \Rightarrow \underline{\underline{g(14) = 10}}$

$f(18) = (18-10)\,g(18) + 400$

520 $\quad g(18) = 120/8 = \underline{\underline{15}}$

$g(x) - 10 = (x-14)\,h(x) \Rightarrow \underbrace{15-10}_{5} = (\underbrace{18-14}_{4})\,h(18) \neq$ egész

$x = 18$

16 (x)

$f(a) = 5$ $\quad f \in \mathbb{Z}[x]$

$f(b) = 5$

$f(c) = 5$ $\quad f(e) = 12$ lehet-e

$f(d) = 5$

EGYSZERRE kiemelhető!

$$f(x) - 5 = (x-a)(x-b)(x-c)(x-d)\,g(x)$$

$g \in \mathbb{Z}[x]$

$$\underset{\text{7 prímszám}}{\underset{\|}{12-5}} = f(e) = \underbrace{\underbrace{(e-a)(e-b)(e-c)(e-d)}_{}\,g(e)}_{\text{4 különböző}}$$

$\underbrace{-1,\ 1,\ -7,\ 7}$

$\Rightarrow 7 \cdot 7 \mid 7 \ \lightning$.