Bsc algebra2 gyakorlat

Javító távzárthelyi, 2020. május 19.

Mindegyik feladatban **indoklás szükséges**, a puszta eredményért nem jár pont. A feladatok 7 pontosak. Az első öt feladat mindegyikéből legalább 4 pontot kell szerezni, különben az eredmény elégtelen. Kérjük, hogy a szerző nevét és NEPTUN-kódját **minden lapra OLVASHATÓ nyomtatott nagybetűkkel** írják fel. A feltöltéssel együtt 150 perc áll rendelkezésre.

1. $(3+3+1$ pont$)$

a) Határozzuk meg az $\{x^3+2x+1, 2x^3+4x+2, 3x^3+6x+3\}$ rendszer rangját $\mathbb{R}$ fölött.

b) Milyen c, d-re lesz $4x^3+cx+d \in \langle x^3+2x+1, 2x^3+4x+2, 3x^3+6x+3\rangle$?

c) Írjuk fel $(3,4)^T$ koordinátavektorát az $(1,2)^T$, $(2,2)^T$ bázisban.

2. $(3+2+2$ pont$)$

a) Legyen V a sík pontjainak vektortere $\mathbb{R}$ fölött. A $C \in \mathrm{Hom}(V)$ lineáris transzformáció mátrixa az $\big((1,2),(2,2)\big)$ bázisban $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Mi C mátrixa a $\big((2,2),(1,2)\big)$ bázisban?

b) Hová viszi az előző pontbeli C leképezés a $(4,5)$ pontot?

c) Számítsuk ki $v = [1+i, 1-2i]^T$ normáját, és a $\langle v, [2i,1]^T\rangle$ skaláris szorzatot.

3. Határozzuk meg az

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

mátrix karakterisztikus polinomját, sajátértékeit, sajátaltereit, ezek dimenzióját, minimálpolinomját és Jordan-alakját.

4. $(2+2+3$ pont$)$

a) Álljon W azon (x,y,z) pontokból $\mathbb{R}^3$-ben, melyekre $x-y+2z=0$. Egészítsük ki a $b_1 = (1/\sqrt{5})(0,2,1)$ rendszert W ortonormált bázisává.

b) Határozzuk meg az $(1,2,3)$ pont távolságát az előző pontban szereplő W altértől.

c) Az $(a,b,c,d) \to (b,c,za,d)$ leképezés mely $z \in \mathbb{C}$ értékekre lesz normális, unitér, illetve önadjungált?

5. Határozzuk meg a $3x^2+8xy-3y^2$ valós kvadratikus alak szimmetrikus mátrixát, ONB-ben vett négyzetösszeg alakját és karakterét.

6. Legyen A egy olyan lineáris transzformáció, melynek m_A minimálpolinomja fölírható $m_A(x) = f(x)g(x)$ alakban, ahol f és g relatív prímek. Igazoljuk, hogy $\mathrm{Im}\, f(A) = \mathrm{Ker}\, g(A)$.