Bsc algebra2 gyakorlat

Távzárthelyi, 2020. május 15. — megoldások

1. Az **a)** és **b)** részek egyszerre oldhatók meg, ha a Gauss-eliminációt elvégezzük a

$$\lambda_1(x^3+2x+1)+\lambda_2(x^3+3x+2)+\lambda_3(x^3+6x+5)=x^3+5x+c$$

összefüggésből az x hatványai szerinti rendezés után kapott egyenletrendszer esetében.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & c \\ 2 & 3 & 6 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 4 & c-1 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & c-4 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Mivel két karika van, az **a)**-ban keresett rang 2. Az egyenletrendszer akkor oldható meg, ha az első sor nem tilos, azaz $c=4$, tehát **b)** ekkor teljesül.

c) Az $\alpha(1,3)+\beta(3,2)=(7,7)$ megoldása $\alpha=1$ és $\beta=2$, ezért az eredmény $[1,2]^T$.

2. **a)** Az áttérés S mátrixának első oszlopában az $\alpha(1,3)+\beta(3,2)=(4,5)$ egyenletrendszer megoldásai állnak, ez $\alpha=1$ és $\beta=1$. A második oszlopban az előző feladat **c)** pontja alapján 1 és 2 áll. A bázistranszformáció képlete alapján az eredmény

$$S^{-1}MS=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

b) Az $(1,1)$ képe a most kapott mátrix utolsó oszlopából $(9/7,13/7)$. (Ezt az eredmény kapjuk akkor is, ha az első bázisban számolva M-mel szorozzuk $[1,2]^T$-at.)

c) A norma $\sqrt{|1+i|^2+|2-i|^2}=\sqrt{7}$. A skaláris szorzat $\overline{(1+i)}\cdot 2+\overline{(2-i)}\cdot i=1$.

3. A karakterisztikus polinom $x(x-1)^3$, a sajátértékek 0 és 1. Az 0-hoz tartozó sajátaltér a $[0,-x,x,0]^T$ vektorokból, az 1-hez tartozó az $[x,0,0,0]^T$ vektorokból áll, mindkettő egydimenziós. A Jordan-alak főátlójában egy darab 0 és 3 darab 1 áll. Mivel az 1 geometriai multiplicitása csak 1, ezért csak egy Jordan-blokk tartozhat hozzá, és így ez 3×3-as kell, hogy legyen. Tehát a minimálpolinom $x(x-1)^3$.

4. **a)** A Gram–Schmidt-eljárásban a $v=(0,3,1)$ vektorral számolva $b_2=(1/\sqrt{22})(-3,3,2)$.

b) A normálvektor $n=(1/\sqrt{11})(1,-1,3)$, a távolság $|\langle n,(1,2,3)\rangle|=8/\sqrt{11}$.

c) A leképezés $M=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & z & 0 \end{bmatrix}$ mátrixa $z=1$-re önadjungált; MM^* diagonális, a főátlóban $1,1,1,|z|^2$ áll. Akkor unitér/ortogonális, ha $|z|=1$, illetve $z=\pm 1$.

5. A mátrix $\begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$, a sajátértékek 8 és 3, ezért az alak pozitív definit. A normált sajátvektorokat kiszámítva a négyzetösszeg alak $8\left(\frac{2x+y}{\sqrt{5}}\right)^2+3\left(\frac{-x+2y}{\sqrt{5}}\right)^2$.

6. Az $\operatorname{Im} A\subseteq \operatorname{Ker} A$ azzal ekvivalens, hogy minden v vektorra $Av\in\operatorname{Ker} A$, azaz hogy $A^2=0$, vagyis hogy $m_A\mid x^2$, tehát hogy a Jordan-alakban minden blokk 0-hoz tartozik, és legfeljebb 2×2-es. Ezért (1) azzal ekvivalens, hogy ezen felül még $r(A)=\dim V/2$ is teljesül, ami pontosan akkor igaz, ha minden Jordan-blokk 2×2-es, hiszen $\dim\operatorname{Ker} A$ a 0-hoz tartozó blokkok száma. Tehát (1) és (3) ekvivalens.

Ha $V=0$, akkor $A=0$, és ekkor (1) és (3) teljesül, de (2) nem. Ha $V\neq 0$, akkor az előzőek szerint (3) $\Longrightarrow$ (2) (hiszen van legalább egy 2×2-es blokk), de a két állítás nem ekvivalens, hiszen (2) megenged 1×1-es blokkokat is.