Bsc algebra2 gyakorlat

Mintatávzárthelyi — megoldások

1. Az **a)** és **b)** részek egyszerre oldhatók meg, ha a Gauss-eliminációt elvégezzük a

$$\lambda_1(x^3+x+1)+\lambda_2(x^3+3x+7)+\lambda_3(x^3+2x+4)=x^3+9x+c$$

összefüggésből az x hatványai szerinti rendezés után kapott egyenletrendszer esetében.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 7 & 4 & c \\ 1 & 3 & 2 & 9 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 6 & 3 & c-1 \\ 0 & 2 & 1 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & c-25 \\ 0 & 2 & 1 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Mivel két karika van, az **a)**-ban keresett rang 2. Az egyenletrendszer akkor oldható meg, ha az első sor nem tilos, azaz $c=25$, tehát **b)** ekkor teljesül.

c) Az $\alpha(1,2)+\beta(2,3)=(1,1)$ megoldása $\alpha=-1$ és $\beta=1$, ezért az eredmény $[-1,1]^T$.

2. **a)** Az áttérés S mátrixának első oszlopában az $\alpha(1,2)+\beta(2,3)=(2,3)$ egyenletrendszer megoldásai állnak, ez $\alpha=0$ és $\beta=1$. A második oszlopban az előző feladat **c)** pontja alapján -1 és 1 áll. A bázistranszformáció képlete alapján az eredmény

$$S^{-1}MS=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

b) Az $(1,1)$ képe a most kapott mátrix utolsó oszlopából $(0,0)$. (Ezt az eredmény kapjuk akkor is, ha az első bázisban számolva M-mel szorozzuk $[-1,1]^T$-at.)

c) A norma $\sqrt{|2+i|^2+|2-i|^2}=\sqrt{10}$. A skaláris szorzat $\overline{(2+i)}\cdot 1+\overline{(2-i)}\cdot i=1+i$.

3. A karakterisztikus polinom $x^3(x-1)$, a sajátértékek 0 és 1. Az 1-hez tartozó sajátaltér az $[x,0,x,0]^T$ vektorokból, a 0-hoz tartozó a $[0,0,x,0]^T$ vektorokból áll, mindkettő egydimenziós. A Jordan-alak főátlójában egy darab 1-es és 3 darab nulla áll. Az eredeti mátrix rangja 3, ezért a Jordan-alakban egy darab 3×3-as nullához tartozó blokk lehet csak (ez a 0-hoz tartozó sajátaltér dimenziójából is leolvasható). Ezért a minimálpolinom $x^3(x-1)$.

4. **a)** A Gram–Schmidt-eljárásban a $v=(1,3,0)$ vektorral számolva $b_2=(5\sqrt{26})^{-1}(3,25,4)$.

b) A normálvektor $n=(\sqrt{26})^{-1}(3,-1,4)$, a távolság $|\langle n,(1,2,3)\rangle|=13/\sqrt{26}=\sqrt{26}/2$.

c) A leképezés M mátrixa soha nem önadjungált; MM^* és M^*M is diagonális, a főátlóban $|z|^2,1,1,1$, illetve $1,1,1,|z|^2$ áll. Ezért akkor lesz normális, ha $|z|=1$, és ilyenkor unitér is.

5. A mátrix $\begin{bmatrix} 10 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$, a sajátértékek 1 és 11, ezért az alak pozitív definit. A normált sajátvektorokat kiszámítva a négyzetösszeg alak

$$1\Big(\frac{x-3y}{\sqrt{10}}\Big)^2+11\Big(\frac{3x+y}{\sqrt{10}}\Big)^2.$$

6. Mindkét irány igaz. A dimenziótétel miatt (1) azzal ekvivalens, hogy $\operatorname{Im} A\cap\operatorname{Ker} A=0$, vagyis, hogy $A^2v=0$-ból $Av=0$ következik. Tegyük fel, hogy (2) igaz és legyen f az m_A és az x^2 legnagyobb közös osztója, ez 1 vagy x lehet. Az f előáll m_A és x^2 polinom-együtthatós lineáris kombinációjaként. Mivel $m_A(A)v=0$, ezért ha $A^2v=0$, akkor $f(A)v=0$, azaz $Av=0$. Megfordítva, tegyük fel, hogy $m_A(x)=x^2g(x)$. Mivel $xg(x)$ alacsonyabb fokú m_A-nál, van olyan w vektor, hogy $Ag(A)w\neq 0$. De akkor $v=g(A)w$ választással $A^2v=0$, de $Av\neq 0$. *Második megoldási ötlet:* A (2) azzal ekvivalens, hogy a Jordan-alakban minden 0-hoz tartozó blokk 1×1-es. Blokkmátrixokkal A^2v és Av is kiszámolható.