Bsc algebra2 gyakorlat

Mintatávzárthelyi

Mindegyik feladatban **indoklás szükséges**, a puszta eredményért nem jár pont. A feladatok 7 pontosak. Az első öt feladat mindegyikéből legalább 4 pontot kell szerezni, különben az eredmény elégtelen. Kérjük, hogy a szerző nevét és NEPTUN-kódját **minden lapra OLVASHATÓ nyomtatott nagybetűkkel** írják fel. A feltöltéssel együtt 150 perc áll rendelkezésre.

1. $(3+3+1$ pont$)$

a) Határozzuk meg az $\{x^3+x+1, x^3+3x+7, x^3+2x+4\}$ rendszer rangját $\mathbb{R}$ fölött.

b) Milyen c-re lesz $x^3+9x+c \in \langle x^3+x+1, x^3+3x+7, x^3+2x+4\rangle$?

c) Írjuk fel $(1,1)^T$ koordinátavektorát az $(1,2)^T$, $(2,3)^T$ bázisban.

2. $(3+2+2$ pont$)$

a) Legyen V a sík pontjainak vektortere $\mathbb{R}$ fölött. A $C \in \mathrm{Hom}(V)$ lineáris transzformáció mátrixa az $\big((1,2),(2,3)\big)$ bázisban $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Mi C mátrixa a $\big((2,3),(1,1)\big)$ bázisban?

b) Hová viszi az előző pontbeli C leképezés az $(1,1)$ pontot?

c) Számítsuk ki $v = [2+i, 2-i]^T$ normáját, és a $\langle v, [1,i]^T\rangle$ skaláris szorzatot.

3. Határozzuk meg az

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

mátrix karakterisztikus polinomját, sajátértékeit, sajátaltereit, ezek dimenzióját, minimálpolinomját és Jordan-alakját.

4. $(2+2+3$ pont$)$

a) Álljon W azon (x,y,z) pontokból $\mathbb{R}^3$-ben, melyekre $3x-y+4z=0$. Egészítsük ki a $b_1 = (4/5, 0, -3/5)$ rendszert W ortonormált bázisává.

b) Határozzuk meg az $(1,2,3)$ pont távolságát az előző pontban szereplő W altértől.

c) Az $(a,b,c,d) \to (b,c,d,za)$ leképezés mely $z \in \mathbb{C}$ értékekre lesz unitér, ortogonális, illetve önadjungált?

5. Határozzuk meg a $10x^2+6xy+2y^2$ valós kvadratikus alak szimmetrikus mátrixát, ONB-ben vett négyzetösszeg alakját és karakterét.

6. Legyen V véges dimenziós vektortér $\mathbb{C}$ fölött és $A \in \mathrm{Hom}(V)$. Az alábbi két állítás közül melyikből következik a másik? Ha nem következik, adjunk ellenpéldát.

(1) $\mathrm{Im}\, A + \mathrm{Ker}\, A = V$.

(2) Az A minimálpolinomjának a nulla legfeljebb egyszeres gyöke.