Bsc algebra2 gyakorlat

Távzárthelyi, 2020. május 15.

Mindegyik feladatban **indoklás szükséges**, a puszta eredményért nem jár pont. A feladatok 7 pontosak. Az első öt feladat mindegyikéből legalább 4 pontot kell szerezni, különben az eredmény elégtelen. Kérjük, hogy a szerző nevét és NEPTUN-kódját **minden lapra OLVASHATÓ nyomtatott nagybetűkkel** írják fel. A feltöltéssel együtt 150 perc áll rendelkezésre.

1. $(3+3+1$ pont$)$

a) Határozzuk meg az $\{x^3+2x+1, x^3+3x+2, x^3+6x+5\}$ rendszer rangját $\mathbb{R}$ fölött.

b) Milyen c-re lesz $x^3+5x+c \in \langle x^3+2x+1, x^3+3x+2, x^3+6x+5\rangle$?

c) Írjuk fel $(7,7)^T$ koordinátavektorát az $(1,3)^T$, $(3,2)^T$ bázisban.

2. $(3+2+2$ pont$)$

a) Legyen V a sík pontjainak vektortere $\mathbb{R}$ fölött. A $C \in \mathrm{Hom}(V)$ lineáris transzformáció mátrixa az $\big((1,3),(3,2)\big)$ bázisban $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Mi C mátrixa a $\big((4,5),(7,7)\big)$ bázisban?

b) Hová viszi az előző pontbeli C leképezés az $(1,1)$ pontot?

c) Számítsuk ki $v = [1+i, 2-i]^T$ normáját, és a $\langle v, [2,i]^T\rangle$ skaláris szorzatot.

3. Határozzuk meg az

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

mátrix karakterisztikus polinomját, sajátértékeit, sajátaltereit, ezek dimenzióját, minimálpolinomját és Jordan-alakját.

4. $(2+2+3$ pont$)$

a) Álljon W azon (x,y,z) pontokból $\mathbb{R}^3$-ben, melyekre $x-y+3z=0$. Egészítsük ki a $b_1 = (1/\sqrt{2})(1,1,0)$ rendszert W ortonormált bázisává.

b) Határozzuk meg az $(1,2,3)$ pont távolságát az előző pontban szereplő W altértől.

c) Az $(a,b,c,d) \to (b,a,d,zc)$ leképezés mely $z \in \mathbb{C}$ értékekre lesz unitér, ortogonális, illetve önadjungált?

5. Határozzuk meg a $7x^2+4xy+4y^2$ valós kvadratikus alak szimmetrikus mátrixát, ONB-ben vett négyzetösszeg alakját és karakterét.

6. Legyen V véges dimenziós vektortér $\mathbb{C}$ fölött és $A \in \mathrm{Hom}(V)$. Az alábbi három állítás közül melyek ekvivalensek?

(1) $\mathrm{Im}\, A = \mathrm{Ker}\, A$.

(2) Az A minimálpolinomja x^2.

(3) Az A Jordan-alakjában mindegyik Jordan-blokk 2×2-es, és nulla benne a sajátérték.