Bsc algebra2 gyakorlat

Kilencedik gyakorlat — röpdolgozat megoldások

1. Határozzuk meg a t értékét úgy, hogy $(-1,1,0)$ és $(2,0,t)$ szöge 120 fok legyen.

Bizonyítás. Mivel $-1/2 = \cos 120^\circ = (-2)/\left(\sqrt{2}\sqrt{2^2+t^2}\right)$, ezért $t = \pm 2$. $\square$

2. Álljon W azon (x,y,u,v) pontokból $\mathbb{R}^4$-ben, melyekre $x+y+u-v=0$. Egészítsük ki a $b_1 = (1/\sqrt{2})(1,0,0,1)$ és $b_2 = (1/\sqrt{2})(0,1,-1,0)$ rendszert W ortonormált bázisává, és határozzuk meg a $(0,0,1,0)$ pont távolságát a W altértől.

Bizonyítás. Egy Gram–Schmidt-féle lépést kell végrehajtani, de **olyan v vektorral, ami W-hez tartozik.** Aki nem W-beli bázisvektort talált ebben a lépésben, annál 1 pontot levontunk. Bármelyik vektorral számolva az eredmény $b_3 = (1/2)(-1,1,1,1)$ lesz, vagy ennek az ellentettje. A W normálvektora (a hipersíkot definiáló egyenletből) $n = (1/2)(1,1,1,-1)$, ezzel $(0,0,1,0)$-t skalárisan szorozva és abszolút értéket véve a keresett távolság $1/2$. (Ezt a távolságot megkaphatjuk úgy is, hogy még egy Gram–Schmidt-lépést teszünk, de az bonyolultabb számolással jár.) $\square$

3. Adjuk meg $\mathbb{C}^2$-ben a $[3,i]^T$ vektor által generált altér ortogonális kiegészítő alterének egy ortonormált bázisát.

Bizonyítás. A keresett altér egydimenziós $\mathbb{C}$ fölött, tehát egy $[3,i]^T$-ra merőleges vektort kell találni és normálni. Ha ez $[z,w]^T$, akkor (ne felejtsünk el konjugálni!) $\overline{3}z + \overline{i}w = 0$ szükséges. Például megfelel $z = i$ és $w = 3$. Normája $\sqrt{|i|^2+|3|^2} = \sqrt{10}$, az eredmény $(1/\sqrt{10})[i,3]^T$. Megfelel persze ennek minden 1 abszolút értékű komplex számmal vett szorzata is. Aki elfelejtett konjugálni, az 1 pontot kapott, aki a norma kiszámításánál is, az 0 pontot. $\square$