Bsc algebra2 gyakorlat

Tizenegyedik gyakorlat — röpdolgozat megoldások

1. Írjunk föl egy olyan 2×2-es valós fölött diagonalizálható valós mátrixot, amely nem diagonalizálható komplex fölött sem ONB-ben.

Bizonyítás. Olyan mátrix kell, ami nem normális (ebből **automatikusan** következik, hogy nem is lehet szimmetrikus). A másik feltételt úgy a legegyszerűbb biztosítani, ha két különböző valós sajátérték van, és hogy ne kelljen számolni sem ehhez, próbálkozzunk felső háromszögmátrixszal. **Mindegyik M megfelel, amelyik nem diagonális, és a főátló két eleme különböző.** Ezt könnyű kiszámolni M és $M^* = M^T$ két sorrendben vett összeszorzásával. De ennél egyszerűbb a következő *számolásmentes* indoklás. Tegyük fel, hogy M komplex ONB-ben diagonalizálható. Ekkor a két sajátaltér egydimenziós és merőleges. Mivel a sajátértékek valósak, van valós sajátvektor is mindkét sajátaltérben (valós lineáris egyenletrendszert kell megoldani, amiben egy szabad változó van). Ezért M diagonalizálható valós felett is ONB-ben, tehát a főtengelytétel miatt szimmetrikus. Mivel háromszögmátrix is, diagonális lenne, ami ellentmondás.

Többen azért rontották el a megoldást, mert nem figyeltek oda, hogy mást jelent az általános diagonalizálhatóság, illetve az ONB-ben való diagonalizálhatóság. □

2. Mely $z \in \mathbb{C}$ számokra igaz, hogy unitér mátrix z-szerese is unitér? És ha unitér helyett önadjungált szerepel?

Bizonyítás. **Sajnos kevesen írták le a megoldás mindkét irányát,** vagyis hogy a feltétel, amit kaptak szükséges is és elégséges is.

Ha M önadjungált, akkor $(zM)^* = \overline{z}M^* = \overline{z}M$. Ha z valós, akkor ez egyenlő zM-mel, ezért a valós számok megfelelnek. Megfordítva, ha **minden** önadjungált M-re zM is önadjungált, akkor speciálisan $M = E$ választással $zE = \overline{z}E$, ahonnan $z = \overline{z}$.

Ha M unitér, akkor zM akkor és csak akkor unitér, ha $(zM)(zM)^* = z\overline{z}MM^* = z\overline{z}E$ az egységmátrix, azaz ha $|z| = 1$. □

3. Adjuk meg a térben az $x + y + z = 0$ egyenletű S síkra való merőleges vetítés összes nemtriviális invariáns alterét.

Bizonyítás. Az invariáns egyenesek az S (origón átmenő) egyenesei, illetve az S-re merőleges, origón átmenő egyenes. Ha ugyanis egy e invariáns egyenes nem merőleges W-re, akkor a vetülete egyenes, ami pontosan akkor része e-nek, ha $e \subseteq W$. Ha merőleges, akkor vetülete az origó, ami része e-nek.

Az invariáns síkok az S, és az összes S-re merőleges (origón átmenő) sík. Ha ugyanis egy W invariáns sík nem merőleges S-re, akkor a vetülete az egész S, ami pontosan akkor része W-nek, ha $W = S$. Ha merőleges, akkor a vetülete a W és az S metszésvonala, ami része W-nek. □