

## Bsc algebra2 gyakorlat

### Tizedik gyakorlat — röpdolgozat megoldások

1. Írjuk föl az  $xy + yz + zu + ux$  kvadratikus alak négyzetösszeg alakját, és határozzuk meg a karakterét.

*Bizonyítás.* A kvadratikus alak szimmetrikus mátrixa

$$\begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \end{bmatrix},$$

a karakterisztikus polinom  $x^2(x-1)(x+1)$ , a sajátértékek  $1, -1, 0$ . Mivel van pozitív és negatív sajátérték is, a karakter indefinit.

Az  $1$ -hez tartozó sajátaltér elemei  $[x, x, x, x]^T$ , normált sajátvektor például  $(1/2)[1, 1, 1, 1]^T$ . A  $-1$ -hez tartozó sajátaltér elemei  $[x, -x, x, -x]^T$ , normált sajátvektor  $(1/2)[1, -1, 1, -1]^T$ . A  $0$ -hoz tartozó sajátaltér elemei  $[x, y, -x, -y]^T$ , ez kétdimenziós. Nem szükséges ONB-t találni benne, mert a négyzetösszeg alakban  $0$  együtthatóval szerepel a megfelelő tag. Ha mégis keresnénk, akkor sem szükséges a Gram-Schmidt-eljárást alkalmazni, mert ránézésre látszik, hogy  $(1/\sqrt{2})[1, 0, -1, 0]^T$  és  $(1/\sqrt{2})[0, 1, 0, -1]^T$  megfelelő.

A négyzetösszeg alak:

$$1 \cdot \left(\frac{x+y+z+u}{2}\right)^2 + (-1) \cdot \left(\frac{x-y+z-u}{2}\right)^2.$$

Érdeemes a négyzetre emelést ellenőrzésként végrehajtani, hogy visszakapjuk-e az eredeti polinomot. Többen ezt elmulasztották, és ezért nem vették észre, ha a sajátvektorokat elfelejtették normálni, ők 4 pontot kaptak.  $\square$