Bsc algebra2 gyakorlat

Kilencedik gyakorlat — elvek és megoldások

1. Skaláris szorzat, norma, szög

Emlékeztető a hatodik feladatsor elején található.

1. *Határozzuk meg az alábbi két pontpár távolságát:* $(0,1,1)$ *és* $(1,0,1)$*;* $(1,1,i)$ *és* $(0,i,1)$. *Számítsuk ki az első két vektor szögét és a második két vektor skaláris szorzatát is.*

Két pont távolsága a különbségvektor hossza, azaz normája. A $(0,1,1)$ és $(1,0,1)$ távolsága $\sqrt{(0-1)^2+(1-0)^2+(1-1)^2} = \sqrt{2}$ (az egységkocka lapátlójának a hossza). A komplex esetben ne felejtsük el az abszolút értéket: $\sqrt{|1-0|^2+|1-i|^2+|i-1|^2} = \sqrt{5}$. A keresett szög koszinusza $(0\cdot 1+1\cdot 1+1\cdot 1)/\big(\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\big) = 1/2$, tehát a szög 60 fok. *A skaláris szorzásnál az első tényezőt kell konjugálni:* $\overline{1}\cdot 0+\overline{1}\cdot i+\overline{i}\cdot 1 = 0$, azaz $(1,1,i)\perp(0,i,1)$.

2. *Igazoljuk, hogy* $b_1 = (1,1)/\sqrt{2}$ *és* $b_1 = (1,-1)/\sqrt{2}$ *ONB* $\mathbb{C}^2$*-ben is. Adjuk meg ebben* $(1,2)$ *és* $(1,i)$ *koordinátáit, majd számítsuk ki a hosszukat a régi és az új koordinátákból is.*

Páronként ortogonális, nem nulla vektorokból álló rendszer független, így csak azt kell ellenőrizni, hogy a két vektor hossza 1, és skaláris szorzatuk nulla. Ha $\mathbf{b} = \big(b_1, b_2\big)$, akkor

$$[(1,2)]_{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix}\langle b_1,(1,2)\rangle\\ \langle b_2,(1,2)\rangle\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3/\sqrt{2}\\ -1/\sqrt{2}\end{bmatrix} \text{ és } [(1,i)]_{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix}\langle b_1,(1,i)\rangle\\ \langle b_2,(1,i)\rangle\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}(1+i)/\sqrt{2}\\ (1-i)/\sqrt{2}\end{bmatrix}.$$

Mivel $\mathbb{C}$ fölött számít a skaláris szorzásnál a sorrend, figyeljünk arra, hogy a fenti képletekben **a bázisvektor az első tényező.** Másik fontos észrevétel: *a hossz bármely ONB-ben ugyanaz,* $\sqrt{5}$, illetve $\sqrt{2}$. Pl. $|(1+i)/\sqrt{2}|^2 = |(1-i)/\sqrt{2}|^2 = 1$, ezért $\|(1,i)\|_{\mathbf{b}} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$.

3. *Igazoljuk valós euklideszi térben az alábbi állításokat. Mely közismert geometriai tételek általánosításai? Melyek igazak komplex felett is?* (1) $x\perp z \iff \|x+z\|^2 = \|x\|^2+\|z\|^2$. (2) $\|x\| = \|z\| \iff x+z\perp x-z$. (3) $\|x+z\|^2+\|x-z\|^2 = 2\|x\|^2+2\|z\|^2$.

(1): Pitagorasz tétele; $\mathbb{C}$ fölött $\Rightarrow$ igaz, $\Leftarrow$ nem. (2): A rombusz átlói merőlegesek; $\mathbb{C}$ fölött $\Leftarrow$ igaz, $\Rightarrow$ nem. Ellenpélda mindkettőre: $x = (1,0)$, $z = (i,0)$. (3): A paralelogramma átlóinak a négyzetösszege egyenlő az oldalainak a négyzetösszegével; $\mathbb{C}$ fölött is igaz.

Mintabizonyítás (2)*-re:* $\langle x+z, x-z\rangle = \langle x,x\rangle - \langle x,z\rangle + \langle z,x\rangle - \langle z,z\rangle$. Valós fölött $\langle x,z\rangle = \langle z,x\rangle$, ezért ez $\langle x,x\rangle - \langle z,z\rangle = \|x\|^2-\|z\|^2$. Ez akkor nulla, ha $\|x\| = \|z\|$.

4. *Mennyi* $a+2b+3c+4d$ *maximuma, ha* $a^2+b^2+c^2+d^2 = 1$*?*

Használjuk a Cauchy-egyenlőtlenséget a $v = (1,2,3,4)$ és $w = (a,b,c,d)$ vektorokra. Azt kapjuk, hogy $|a+2b+3c+4d| = |\langle v,w\rangle| \le \|v\|\|w\| = \sqrt{30}\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2} = \sqrt{30}$. Be kell látni, hogy ez elérhető. A Cauchy-egyenlőtlenségben akkor áll egyenlőség, ha a két vektor párhuzamos, így $(a,b,c,d) = \lambda(1,2,3,4)$ kell, hogy teljesüljön. Mivel (a,b,c,d) a feltétel szerint egységvektor, $\lambda = \pm\big(1/\sqrt{30}\big)$. Továbbá $\langle v,w\rangle$ pozitív kell, hogy legyen, hiszen a Cauchy-egyenlőtlenségben abszolút érték van. A $w = \big(1/\sqrt{30}\big)(1,2,3,4)$ választás a megfelelő.

(A legtöbb nevezetes egyenlőtlenség alkalmas szélsőérték-feladatok elegáns megoldására.)

2. Ortogonalizáció

Gram–Schmidt eljárás: Ha $b_1, \ldots, b_k$ már megvan, akkor $b = v - \langle b_1, v\rangle b_1 - \ldots - \langle b_k, v\rangle b_k$ és $b_{k+1} = b/\|b\|$. **Figyeljünk arra, hogy v-t mindig a megfelelő altérből vegyük.**

5. *Legyen W a térben az $x+y-z=0$ egyenletű sík. Adjunk meg W-ben a Gram–Schmidt-eljárással egy ortonormált bázist, és ezt egészítsük ki a tér egy ortonormált bázisává.*

Az első vektort bárhogyan vehetjük a W altérből, a számolást gyorsítja, ha van nulla komponense. Például legyen $v = (1,0,1)$. A b_1-et úgy kapjuk, hogy ezt elosztjuk a hosszával, azaz $\sqrt{2}$-vel. A második lépésben egy újabb $v \in W$ vektort kell venni, olyat, ami a már megkonstruált bázisvektoroktól nem függ. (Ha véletlenül olyat vennénk, ami függ tőlük, akkor a Gram–Schmidt képletében $b=0$ jön ki. Ilyenkor másik v-t kell választani.)

Legyen $v = (0,1,1) \in W$. Ekkor

$$b = v - \langle b_1, v\rangle b_1 = (0,1,1) - \frac{1}{\sqrt{2}}(1\cdot 0 + 0\cdot 1 + 1\cdot 1)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1) = (-1/2,\ 1,\ 1/2)\,.$$

Érdemes ellenőrizni, hogy a kapott $b \in W$, továbbá hogy $b \perp b_1$. A b normálásához vegyük észre, hogy b normáltja ugyanaz, mint λb normáltja, bármely $\lambda > 0$ skalárra. Ezért kényelmesebb b helyett $2b$-t normálni, mert akkor nem kell törtekkel számolni. Az eredmény $b_2 = \big(1/\sqrt{6}\big)(-1,2,1)$. Tehát b_1 és b_2 a W síkon ortonormált bázist alkot.

Ha még egy lépést teszünk, pl. $v = (1,0,0)$ választással (ez a vektor már nincs W-ben), akkor $b_3 = \big(1/\sqrt{3}\big)(1,1,-1)$ adódik. Ekkor b_1, b_2, b_3 ONB $\mathbb{R}^3$-ben.

A W sík egyenlete $0 = x+y-z = \langle (x,y,z), (1,1,-1)\rangle$, ezért W az $(1,1,-1)$-re merőleges vektorokból áll. Ennek normáltja (ami most b_3) a W sík **normálvektora.** Vagyis b_3 közvetlenül leolvasható W egyenletéről.

6. *Álljon a $W \le \mathbb{R}^4$ altér azokból a vektorokból, melyek koordinátaösszege nulla. Határozzuk meg az $(1,2,3,4)$ pont távolságát ettől a „hipersík"-tól.*

$b_1 = (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0, 0)$, $b_2 = (0,0,1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$, $b_3 = (1/2, 1/2, -1/2, -1/2)$ ONB W-ben. Az ortogonalizációt $(1,2,3,4)$-gyel folytatva $w = (5/2, 5/2, 5/2, 5/2)$, aminek a hossza, és így a keresett távolság 5 és $b_4 = (1/2,1/2,1/2,1/2)$ (lásd az összefoglalót a feladatsoron).

Második megoldás: A W altér a $v = (1,1,1,1)$ vektorra merőleges vektorok halmaza. Legyen $(1,2,3,4) = \lambda(1,1,1,1) + u$, ahol $u \in W$. Ezt skalárisan v-vel szorozva $v \perp u$ miatt $1+2+3+4 = 4\lambda$, ahonnan $\lambda = 5/2$ és $u = (-3/2, -1/2, 1/2, 3/2)$. Az $(1,2,3,4)$ távolsága W-től (azaz a W-re vett merőleges vetületétől) a λv hossza, azaz 5. **Ha W egy olyan altér, aminek a dimenziója eggyel kisebb a tér dimenziójánál, és W normálvektora n, akkor a v távolsága W-től** $|\langle v, n\rangle|$ (ne felejtsük le az abszolút értéket).

7. *Legyen $U \le \mathbb{R}^4$ azon vektorok halmaza, melyekben az első két koordináta összege egyenlő az utolsó két koordináta összegével. Adjunk meg U-ban egy ONB-t, határozzuk meg $U^\perp$ elemeit, végül írjuk fel az $(1,0,0,0)$ vektort egy U-beli és egy $U^\perp$-beli vektor összegeként.*

$b_1 = (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0, 0)$, $b_2 = (0,0,1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$, $b_3 = (1/2,1/2,1/2,1/2)$ egy ONB U-ban. Az $U^\perp$ alteret az U normálvektora generálja, elemei $(\lambda, \lambda, -\lambda, -\lambda)$. A keresett felbontás $(1,0,0,0) = (1/4)(3,-1,1,1) + (1/4)(1,1,-1,-1)$.

8. *Igazoljuk, hogy ha b_1, b_2, b_3, b_4 ONB, akkor $\langle b_1, b_2\rangle^\perp = \langle b_3, b_4\rangle$.*

Ha $v = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \lambda_3 b_3 + \lambda_4 b_4$, akkor $\langle b_1, v\rangle = \lambda_1$ és $\langle b_2, v\rangle = \lambda_2$. Tehát $v \perp \langle b_1, b_2\rangle$ akkor és csak akkor, ha $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, azaz ha $v = \lambda_3 b_3 + \lambda_4 b_4$.