Bsc algebra2 gyakorlat

Nyolcadik gyakorlat — röpdolgozat megoldások

1. *Mi lesz az*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

mátrix minimálpolinomja?

Bizonyítás. A karakterisztikus polinom $k(x) = x^3(x-1)$. Azok a normált osztók, melyeknek 0 és 1 gyöke, $x(x-1)$, $x^2(x-1)$, $x^3(x-1)$. A mátrixot $x^2(x-1)$-be behelyettesítve nem nulla az eredmény, ezért a minimálpolinom $x^3(x-1)$. (Elég ez az egyetlen behelyettesítés, hiszen $x^3(x-1)$-nek mindenképpen gyöke a mátrix a Cayley–Hamilton-tétel miatt, és $x(x-1)$ osztója $x^2(x-1)$-nek, ezért $x(x-1)$-nek nem lehet gyöke.) $\square$

2. *Egy komplex feletti mátrix karakterisztikus polinomja $x^6(x-1)^4(x-2)^2$, a minimálpolinomja $x^5(x-1)(x-2)$. Mik a lehetséges Jordan-alakok?*

Bizonyítás. Az 1 és 2 sajátértékekhez tartozó blokkok a minimálpolinom miatt 1×1-esek, a karakterisztikus polinom miatt előbbiből 4, utóbbiból 2 van. Még hat darab 0-t kell elhelyezni a főátlóban. Van egy 5×5-ös blokk nulla sajátértékkel, tehát a kimaradó 0-s blokk csak 1×1-es lehet. A mátrixnak tehát ez az egyértelmű Jordan-alakja (a blokkok cserélgetése hasonló mátrixot eredményez). $\square$

3. *Adjunk meg két olyan nem hasonló, 5×5-ös mátrixot, melyek rangja, karakterisztikus polinomja és minimálpolinomja is megegyezik, és egyik sem invertálható.*

Bizonyítás. Vegyünk egy $z \neq 0$ skalárt. Az egyik mátrixba tegyünk két darab z-hez tartozó 2×2-es Jordan-blokkot, a másikba csak egyet, és két 1×1-es z-s blokkot. Végül mindkét mátrixban legyen egy 1×1-es 0-s blokk. Ez utóbbi biztosítja, hogy a mátrixok ne legyenek invertálhatók. Mindkét mátrix rangja 4, a minimálpolinomjuk $x(x-z)^2$, a karakterisztikus pedig $x(x-z)^4$. $\square$