Bsc algebra2 gyakorlat

Hetedik gyakorlat — röpdolgozat megoldások

1. Határozzuk meg a

$$\begin{bmatrix} 9 & -9 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \\ 6 & -12 & -1 \end{bmatrix}$$

mátrix karakterisztikus polinomját, sajátértékeit és sajátaltereit, a sajátértékek algebrai-, ill. geometriai multiplicitását. Diagonalizálható-e a mátrix?

Bizonyítás. A karakterisztikus polinom $(-1-x)(x-3)^2$, a sajátértékek -1 és 3, ezek algebrai multiplicitása tehát 1 és 2. Mindkettőhöz egydimenziós sajátaltér tartozik, az 1 sajátérték esetében $[0,0,1]^T$, a 3 esetében például $[6,4,-3]^T$ generálja a megfelelő sajátalteret. Tehát mindkét geometriai multiplicitás 1. Mivel a 3 geometriai és algebrai multiplicitása különböző, ezért a mátrix nem diagonalizálható. □

2. Legyen A a háromdimenziós térben a z tengely körüli $+90°$-os forgatás, B pedig az y tengely körüli $+60°$-os forgatás (amelyik az x tengely pozitív irányú félegyenesét a z tengely pozitív iránya felé forgatja). Határozzuk meg AB és BA karakterisztikus polinomját, sajátértékeit és sajátaltereit.

Bizonyítás. Az A, illetve B mátrixa a szokásos bázisban

$$[A] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad [B] = \begin{bmatrix} \cos 60° & 0 & -\sin 60° \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin 60° & 0 & \cos 60° \end{bmatrix}.$$

Az irodalomban néhol (például a Wikipédián is) az ellenkező irányú y-tengely körüli forgatást nevezik pozitív irányúnak, ami tehát az x-tengely pozitív felét a z-tengely negatív iránya felé forgatja, ebben az esetben $[B]$ a fenti mátrix transzponáltja lesz. Azt is elfogadtuk teljes megoldásnak, aki ez utóbbival számolt. A két kompozíció mátrixa

$$[AB] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ \cos 60° & 0 & -\sin 60° \\ \sin 60° & 0 & \cos 60° \end{bmatrix}, \quad [B] = \begin{bmatrix} 0 & -\cos 60° & -\sin 60° \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin 60° & \cos 60° \end{bmatrix}.$$

Mindkettő karakterisztikus polinomja $(1-x)(x^2+x/2+1)$. Szükségszerű is, hogy ugyanaz legyen, hiszen $AB = B^{-1}(BA)B$, vagyis AB és BA hasonlók. Mindkét transzformáció tengely körüli forgatás, a tengely irányát az 1 sajátértékhez tartozó sajátvektor adja meg, $[1,-1,\sqrt{3}]^T$, illetve $[1,1,-\sqrt{3}]^T$. A forgatás szögét a komplex sajátértékekből kaphatjuk, ezek hossza 1, szögük pedig közelítőleg $104.478°$. A $[B]^T$-tal számolók eredménye $[-1,1,\sqrt{3}]^T$, illetve $[1,1,\sqrt{3}]^T$. □

3. Legyen $a_0 = 1$, $b_0 = 3$, $a_{k+1} = 2b_k$, $b_{k+1} = -3a_k + 5b_k$ $(k \geq 0)$. A sorozat általános elemét írjuk fel a mátrixhatványozás segítségével, majd a mátrixot diagonalizálva adjunk az eredményre explicit képletet.

Bizonyítás. Ha $v_k = [a_k, b_k]^T$, akkor $v_0 = [1,3]^T$ és a rekurzió szerint

$$v_{k+1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} v_k\,, \text{ a sajátvektorokból képzett mátrix } S = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix},$$

a sajátértékek 2 és 3. A végeredmény $a_k = 4 \cdot 3^k - 3 \cdot 2^k$ és $b_k = 6 \cdot 3^k - 3 \cdot 2^k$. □