

Bsc algebra2 gyakorlat
Tizenegyedik gyakorlat — elvek és megoldások

1. AZ EUKLIDESZI TÉR SPECIÁLIS TRANSZFORMÁCIÓI

Emlékeztető: A feladatsor elején.

$A \mathbb{C}^4$ alábbi transzformációi közül melyek normálisak, önadjungáltak, unitérek?

$$A \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}, \quad B \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_4 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}, \quad C \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_1 \\ u_1 \\ u_1 \end{bmatrix},$$

$$D \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 + u_2 + u_3 + u_4 \\ u_1 + u_2 + u_3 + u_4 \\ u_1 + u_2 + u_3 + u_4 \\ u_1 + u_2 + u_3 + u_4 \end{bmatrix}, \quad E \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 - u_2 \\ u_2 - u_3 \\ u_3 - u_4 \\ u_4 - u_1 \end{bmatrix}.$$

Először felírjuk az $[A]$, $[B]$, $[C]$, $[D]$, $[E]$ mátrixokat:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ekkor $[A^*]$ az $[A]$ transzponáltjának (elemenként való) konjugáltja. A normalitást az dönti el, hogy $[A^*][A]$ és $[A][A^*]$ egyenlők-e. Az önadjungáltságot az, hogy $[A]$ és $[A^*]$ egyenlők-e. Az unitérséget az, hogy $[A][A^*]$ az egységmátrix-e (tehát nem kell mátrixot invertálni, és elég az egyik irányban összeszorozni őket, hiszen tudjuk, hogy ha M és N ugyanakkora négyzetes mátrixok, és MN az egységmátrix, akkor NM is).

Az A transzformáció nem normális (ez abból is látszik, hogy a mátrixa egy Jordan-blokk, ezért nem ortonormált bázisban sem diagonalizálható). Tehát önadjungált, unitér sem lehet. A B unitér, így normális, de nem önadjungált (valóban ortogonális, de nem szimmetrikus). A C nem normális, de azért nem ortonormált bázisban diagonalizálható (ez egy nem merőleges vetítés). A D önadjungált, így normális, de nem unitér (valóban szimmetrikus de nem ortogonális). Az E normális, de se nem önadjungált, se nem unitér.

Tekintsük \mathbb{R}^4 -en az alábbi transzformációkat. Melyek szimmetrikusak, illetve ortogonálisak?

$$F \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_4 \\ u_3 \\ u_2 \\ u_1 \end{bmatrix}, \quad G \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (u_1 - u_2 + u_3 - u_4)/2 \\ (u_1 - u_2 - u_3 + u_4)/2 \\ (u_1 + u_2 + u_3 + u_4)/2 \\ (u_1 + u_2 - u_3 - u_4)/2 \end{bmatrix}, \quad H \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 + u_2 \\ u_1 - u_2 \\ u_3 + u_4 \\ u_3 - u_4 \end{bmatrix}.$$

Ismét a mátrixokat kell felírni. Az F ortogonális és szimmetrikus is. A G ortogonális, de nem szimmetrikus, végül H szimmetrikus, de nem ortogonális.

A síkon a tükrözések, forgatások, vetítések közül melyek szimmetrikusak vagy ortogonálisak?

A síkon a(z origót fixáló) tükrözések, forgatások ortogonálisak, hiszen egybevágósági transzformációk, de a vetítés nem az. A tengelyes tükrözés és a merőleges vetítés szimmetrikus (a főtengety-tétel miatt, hiszen tudjuk, hogy ONB-ben diagonalizálhatók valós fölött), de a forgatás csak akkor, ha a szöge $k180^\circ$ (vagyis amikor valósak a sajátértékek).

2. ADJUNGÁLT ÉS SKALÁRIS SZORZAT

Emlékeztető: $\langle Av, w \rangle = \langle v, A^*w \rangle$ az adjungált transzformációt definiáló azonosság.

*Igazoljuk, hogy ha $Av = \lambda v$ és $A^*w = \mu w$, akkor $\bar{\lambda} = \mu$ vagy $v \perp w$.*

A feltétel szerint $\bar{\lambda}\langle v, w \rangle = \langle Av, w \rangle = \langle v, A^*w \rangle = \mu\langle v, w \rangle$, így ha $\langle v, w \rangle \neq 0$, akkor $\bar{\lambda} = \mu$.

Önadjungált A -ra ebből két dolog is következik. Ha $v \neq 0$, akkor $w = v$ és $\lambda = \mu$ választással $\langle v, v \rangle = \|v\|^2 \neq 0$ miatt $\bar{\lambda} = \lambda$, azaz önadjungált transzformáció sajátértékei valósak. De akkor az állítás azt mondja, hogy A különböző sajátértékhez tartozó sajátvektorai ortogonálisak. Fontos leszögezni, hogy ez általánosabban, normális transzformációkra is igaz.

Mutassuk meg, hogy ha $AA^ = 0$, akkor $A = 0$.*

Tetszőleges v vektorra $\|A^*v\|^2 = \langle A^*v, A^*v \rangle = \langle v, AA^*v \rangle = 0$, így $A^* = 0$, azaz $A = 0$.

*Igazoljuk, hogy ha A normális, akkor $\|Av\| = \|A^*v\|$ minden v vektorra.*

Valóban, $\|A^*v\|^2 = \langle A^*v, A^*v \rangle = \langle v, AA^*v \rangle = \langle v, A^*Av \rangle = \langle Av, Av \rangle = \|Av\|^2$.

3. INVARIÁNS ALTÉR

Emlékeztető: A $W \leq V$ altér *invariáns* az A transzformációra, ha A nem tud kivinni vektort W -ből, azaz $w \in W \implies Aw \in W$. *Triviális* invariáns alterek: $\{0\}$ és V . **Ha W egy A -invariáns altér, akkor W^\perp , vagyis az ortogonális kiegészítő altere A^* -invariáns.**

Határozzuk meg a síkon és a térben a forgatások és tükrözések nemtriviális invariáns altereit.

A síkon invariáns (origón átmenő) egyeneseket keresünk. A tükrözés tengelye és a rá merőleges egyenes is ilyen. Egy forgatásnak csak akkor van invariáns egyenese, ha helyben hagyás, vagy origóra tükrözés, ezeknek a transzformációknak minden egyenes invariáns altere.

Ha egy $v \neq 0$ vektor egy invariáns egyenesen van, akkor Av párhuzamos v -vel, és ezért v sajátvektor. Vagyis az egydimenziós invariáns alterek a sajátvektorok által generált alterek. A térben ezért csak az invariáns (origón átmenő) síkokat érdekes megkeresni. Egy egyenes körüli forgatás esetében a rá merőleges sík lesz invariáns, és ha a forgatás szöge nem 0 vagy 180° , akkor ezen a síkon nincs is sajátvektor. (Invariáns altér a tengely is.) Egy S síkra tükrözés esetén maga S , és az S -re merőleges síkok is invariánsak lesznek.

Mik a deriválás nemtriviális invariáns alterei?

A legfeljebb k -adfokú polinomok minden k -ra, hiszen deriválásnál a fok csökken. Más invariáns altér nincs. Ha ugyanis W invariáns altér, és $f \in W$ egy k -adfokú polinom, akkor $f, f', f'', \dots, f^{(k)} \in W$. Ez független rendszer, hiszen csupa különböző fokú polinomból áll, és ezért generálnia kell a legfeljebb k -adfokú polinomok $k + 1$ -dimenziós alterét.

Mutassuk meg, hogy ha $AB = BA$, akkor A minden sajátaltere B -invariáns.

Legyen $W = \{v : Av = \lambda v\}$ a λ -hoz tartozó sajátaltere A -nak. Ha $w \in W$, akkor $Bw \in W$, azaz Bw is sajátvektor λ sajátértékkel, mert $A(Bw) = B(Aw) = B(\lambda w) = \lambda Bw$.