Bsc algebra2 gyakorlat

Tizedik gyakorlat — elvek és megoldások

Emlékeztető: A homogén másodfokú, valós együtthatós polinomok másik neve: *valós kvadratikus alak.* Ezek általános alakja tehát $Q(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j$. *Mátrixos felírás:* ha $u = [x_1, \ldots, x_n]^T$ és $A = (a_{ij})$, akkor $Q(u) = u^T A u$.

Legyen $A = ((a_{ij})) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ és $u^T = (x_1, x_2, x_3)$. Számítsuk ki az $u^T A u$ szorzatot.

Az a_{ij} együtthatók nem egyértelműek, mert $x_i x_j = x_j x_i$. Például $2x_1x_2 = x_1x_2 + x_2x_1 = 2x_2x_1$ ugyanaz a kvadratikus alak, de a hozzájuk tartozó mátrixok különbözők:

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ezek közül csak a középső szimmetrikus (a főátlóra), vagyis teljesíti az $A^T = A$ egyenlőséget. *Minden valós kvadratikus alakhoz egyértelműen tartozik egy szimmetrikus mátrix.* Ennek elemeit úgy kapjuk, hogy az $(a_{ij} + a_{ji})/2$ számot írjuk a mátrixba a főátlóra szimmetrikusan.

Mi a $Q_1(x, y) = x^2 + y^2$, $Q_2(x, y) = x^2$, $Q_3(x, y) = x^2 - y^2$ alakok értékkészlete?

Nyilván $Q_1(x, y) \geq 0$, és nulla is csak akkor lehet, ha $x = y = 0$. Ezért az értékkészlet a nemnegatív valós számok halmaza. Ugyanez Q_2 értékkészlete is, de ez a nullát végtelen sok helyen felveszi (a $(0, y)$ pontokban). Végül Q_3 értékkészlete nyilván az összes valós szám. Ezért Q_1 **pozitív definit,** Q_2 **pozitív szemidefinit,** Q_3 pedig **indefinit.**

Kvadratikus alak négyzetösszeg alakjának és karakterének megállapítása.

(1) Felírjuk a szimmetrikus mátrixát.
(2) A mátrixot diagonalizáljuk. Ez mindig lehetséges valós sajátértékekkel.
(3) A sajátértékekből leolvassuk a kvadratikus karaktert, vagyis az értékkészletet.
(4) A sajátvektorokból kiválasztunk egy ortonormált bázist.
(5) A négyzetösszeg alak együtthatói a sajátértékek, a képlet többi részét a sajátvektorok komponenseivel töltjük ki, az alábbi példák szerint.

Mi az $2x^2 + 2xy + 2y^2$, $2x^2 + 4xy + 2y^2$, $2x^2 + 6xy + 2y^2$ alakok négyzetösszeg alakja?

A három kvadratikus alak szimmetrikus mátrixa, és ezek sajátértékei a következők.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \lambda = 1, 3; \qquad \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad \lambda = 0, 4; \qquad \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad \lambda = -1, 5.$$

Mindhárom esetben a normált sajátvektorok $= \big(1/\sqrt{2}\big)[1, -1]$, illetve $= \big(1/\sqrt{2}\big)[1, 1]$. Ezek merőlegesek, és így ortonormált bázist alkotnak. Általában is, **szimmetrikus mátrix különböző sajátértékeihez tartozó sajátvektorok ortogonálisak.** (Ha valamelyik sajátaltér több, mint egy dimenziós, akkor abban a Gram-Schmidt eljárással választhatunk ONB-t.) Az első kvadratikus alak négyzetösszeg alakja (ellenőrizzük, hogy ez azonosság):

$$2x^2 + 2xy + 2y^2 = 1 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{-1}{\sqrt{2}}y\right)^2 + 3 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y\right)^2$$

A két zárójel előtt a két sajátérték áll, a zárójelben az x, illetve az y együtthatói a megfelelő két sajátvektor komponensei. Ez a kifejezés mindenütt nemnegatív, és nulla csak akkor lehet, ha mindkét zárójelben nulla áll, azaz ha $x = y = 0$. Ezért az első alak pozitív definit.

A második esetben a négyzetösszeg alak

$$2x^2+4xy+2y^2 = 0\cdot\Big(\frac{1}{\sqrt{2}}x+\frac{-1}{\sqrt{2}}y\Big)^2 + 4\cdot\Big(\frac{1}{\sqrt{2}}x+\frac{1}{\sqrt{2}}y\Big)^2.$$

Ez is mindig nemnegatív, de $y=-x$ esetén nulla, és így pozitív szemidefinit. Végül

$$2x^2+6xy+2y^2 = -1\cdot\Big(\frac{1}{\sqrt{2}}x+\frac{-1}{\sqrt{2}}y\Big)^2 + 5\cdot\Big(\frac{1}{\sqrt{2}}x+\frac{1}{\sqrt{2}}y\Big)^2.$$

A két zárójelben álló kifejezés **egymástól függetlenül minden értéket felvehet,** mert a két bázisvektor generátorrendszert alkot, és ezért az $(x-y)/\sqrt{2}=p$, $(x+y)/\sqrt{2}=q$ egyenletrendszer minden (p,q) párra megoldható. Ezért ez az alak indefinit, ugyanúgy az összes valós szám benne van az értékkészletében, mint a $Q_3(x,y)=x^2-y^2$-nak.

A $Q(x,y)=1$ egyenlet egy kúpszeletet ad a síkon. Az első alak esetében ellipszist, a második esetben két egyenest, a harmadikban hiperbolát kapunk. Az alábbi oldalon egy animáció mutatja, hogy az $x^2+dxy+y^2=1$ görbe hogyan változik d függvényében. A diagonalizálással kapott ortonormált bázis a görbe tengelyeinek irányát jelöli ki.

Négyzetösszeg alakú-e az $x^2+y^2+(x+y)^2=(\sqrt{3}x)^2+(\sqrt{3}y)^2-(x-y)^2$ kvadratikus alak?

Egyik sem négyzetösszeg alak, mert abban az együtthatókból képzett vektoroknak bázist kell alkotniuk. Az első felírásból így is látszik, hogy ez az alak pozitív definit.

A 7. feladatsor 2. feladatában szereplő alakok négyzetösszeg alakjai a következők.

$$x^2-xy+y^2=(1/2)\Big(\frac{x+y}{\sqrt{2}}\Big)^2+(3/2)\Big(\frac{x-y}{\sqrt{2}}\Big)^2, \text{ pozitív definit.}$$

$$x^2-2xy+y^2=2\Big(\frac{x-y}{\sqrt{2}}\Big)^2,$$

pozitív szemidefinit (a 0 is sajátérték).

$$x^2-3xy+y^2=-(1/2)\Big(\frac{x+y}{\sqrt{2}}\Big)^2+(5/2)\Big(\frac{x-y}{\sqrt{2}}\Big)^2, \text{ indefinit.}$$

$$x^2+xy=\frac{1+\sqrt{2}}{2}\left(\frac{(1+\sqrt{2})x+y}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}\right)^2+\frac{1-\sqrt{2}}{2}\left(\frac{(1-\sqrt{2})x+y}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}\right)^2,$$

indefinit.

$$-x^2+10xy-y^2-z^2=-6\Big(\frac{x-y}{\sqrt{2}}\Big)^2+4\Big(\frac{x+y}{\sqrt{2}}\Big)^2-z^2,$$

indefinit.

$$xy+yz=\frac{\sqrt{2}}{2}\Big(\frac{x+\sqrt{2}y+z}{2}\Big)^2-\frac{\sqrt{2}}{2}\Big(\frac{x-\sqrt{2}y+z}{2}\Big)^2,$$

indefinit (a 0 is sajátérték).

$$xy+xz+yz=\Big(\frac{x+y+z}{\sqrt{3}}\Big)^2-(1/2)\Big(\frac{x-y}{\sqrt{2}}\Big)^2-(1/2)\Big(\frac{x+y-2z}{\sqrt{6}}\Big)^2,$$

indefinit. Itt vigyázni kell, mert a $-1/2$ sajátértékhez tartozó sajátaltér kétdimenziós, ebben a Gram–Schmidt-eljárással adtunk meg ONB-t (ami nem is egyértelmű).

$$-x^2+2xy+2xz=\Big(\frac{x+y+z}{\sqrt{3}}\Big)^2-2\Big(\frac{-2x+y+z}{\sqrt{6}}\Big)^2, \text{ indefinit (a 0 is sajátérték).}$$