Bsc algebra2 gyakorlat

Nyolcadik gyakorlat — elvek és megoldások

1. Minimálpolinom

Emlékeztető: Polinomba mátrixot úgy helyettesítünk, hogy az x helyébe írjuk, és *a konstans tagot az egységmátrixszal szorozzuk.* **A minimálpolinom a legalacsonyabb fokú normált polinom, aminek a mátrix gyöke. Az összes többi polinom, aminek a mátrix gyöke, osztható a minimálpolinommal. A minimálpolinom gyökei a sajátértékek (mindegyik), és osztója a karakterisztikus polinomnak** (Cayley–Hamilton-tétel).

Algoritmus kis mátrixokra: kiszámítjuk a karakterisztikus polinomot, gyöktényezős alakra bontjuk, és meghatározzuk a normált osztókat. Ez ugyanúgy megy, mint számelméletből: ahogy a $12 = 2^2 \cdot 3$ osztói a $2^i 3^j$ alakú számok, ahol $0 \le i \le 2$ és $0 \le j \le 1$, ugyanúgy például $k(x) = x^2(1-x)$ normált osztói az $x^i(x-1)^j$ alakú polinomok, ahol $0 \le i \le 2$ és $0 \le j \le 1$. Mivel a minimálpolinomnak minden sajátérték gyöke, ezért a 0 kitevőt nem kell figyelembe venni, tehát ebben a konkrét esetben csak az $x(x-1)$ és az $x^2(x-1)$ polinomokat kell tekinteni. A következő lépésben az ilyen osztókba behelyettesítjük a mátrixot, és feljegyezzük, hogy nullát kapunk-e. Magába a karakterisztikus polinomba felesleges behelyettesíteni, mert annak a Cayley–Hamilton-tétel szerint biztosan gyöke a mátrix. A minimálpolinom a legalacsonyabb fokú lesz a felsoroltak közül, amelynek a mátrix gyöke. A konkrét példában ha $x(x-1)$-nek gyöke a mátrix, akkor ez a minimálpolinom, ha nem, akkor $x^2(x-1)$.

Határozzuk meg az alábbi M mátrixok minimálpolinomját. Melyek diagonalizálhatók?

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Az első mátrixra $k(x) = (x-1)^2$, a normált osztók $x-1$ és $(x-1)^2$. Az előbbinek nem gyöke M, mert $M - E \neq 0$, és így $m(x) = (x-1)^2$. A második mátrixra $k(x) = (x-2)^3$, az $x-2$-nek nem gyöke M, mert M nem az egységmátrix kétszerese, viszont $(M-2E)^2 = 0$ (blokkonként végezhetjük a négyzetre emelést), ezért $m(x) = (x-2)^2$. Látható, hogy a gyöktényezős alakba is szabad behelyettesíteni. A harmadik mátrixra $k(x) = (x-2)^2(x-3)$. Itt 1×1-es blokkok vannak, és ezért a legalacsonyabb fokú jelölt, $m(x) = (x-2)(x-3)$ megfelelő lesz. Általában *egy diagonális mátrix esetében a minimálpolinom a főátlóbeli elemekhez tartozó gyöktényezők szorzata, az egyenlő gyöktényezőket csak egyszer szerepeltetve.* A további minimálpolinomok sorban $(x-2)^2(x-3)$, $(x-2)(x-3)$, $x(x-3)$. A sajátalterek dimenzióit kiszámítva kiderül, hogy az első, a második és a negyedik mátrix nem diagonalizálható, a többi igen. Általában **egy mátrix akkor és csak akkor diagonalizálható $\mathbb{C}$ fölött, ha a minimálpolinomjának minden gyöke egyszeres.**

Hogyan olvashatjuk le ránézésre egy 2×2-es mátrix minimálpolinomját?

Ha λE alakú, ahol E az egységmátrix, akkor $m(x) = x - \lambda$, egyébként $m(x) = k(x)$. Ha ugyanis a minimálpolinom elsőfokú, azaz $x - \lambda$, akkor $M - \lambda E = 0$. Ha nem, akkor mivel osztója $k(x)$-nek, és mindkettő normált, $m(x) = k(x)$.

Hogyan látszik a minimálpolinomról, hogy a transzformációnak létezik inverze?

A nulla nem sajátérték, azaz $m(0) \neq 0$.

Mutassuk meg, hogy ha $M \in \mathbb{C}^{n\times n}$ és $\exists k M^k = E$, akkor M diagonalizálható.

Mivel M gyöke $x^k - 1$-nek, ezért $m(x) \mid x^k - 1$, és így $m(x)$ minden gyöke egyszeres.

Vezessük le a Cayley–Hamilton-tételből: ha $M \in \mathbb{C}^{n\times n}$ nilpotens ($\exists k M^k = 0$), akkor $M^n = 0$.

Mivel M gyöke x^k-nak, ezért $m(x) \mid x^k$, de m foka legfeljebb n, így $m(x) \mid x^n$.

Oldjuk meg $\mathbb{Q}^{2\times 2}$-ben az $X^4 = 2X$ egyenletet.

Mivel X gyöke $x^4 - 2x = x(x^3 - 2)$-nek, ezért a racionális együtthatós $m(x)$ osztója ennek a polinomnak. A Schönemann–Eisenstein miatt x^3-2 irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött, ezért $x(x^3-2)$-nek a normált racionális együtthatós osztói 1, x, $x^3 - 2$, $x(x^3 - 2)$. Az X mátrix 2×2-es, ezért m legfeljebb másodfokú. De $m(x) \neq 1$, mert a konstans 1 polinomba X-et helyettesítve nem nullát, hanem az egységmátrixot kapjuk. Ezért $m(x) = x$, azaz $0 = m(X) = X$.

2. Hasonlóság, Jordan-alak

Emlékeztető: Két mátrix **hasonló,** ha ugyanannak a transzformációnak a mátrixai, csak esetleg más bázisban (azaz ha bázistranszformációval egymásba vihetők). Hasonló mátrixoknak ugyanaz a determinánsa, a rangja, a karakterisztikus- és a minimálpolinomja, a sajátértékei (de a sajátvektorai nem feltétlenül), mert ezek A és $[A]$ esetében ugyanazok.

Egy mátrix **Jordan-blokk,** ha a főátlójában végig ugyanaz a λ áll, az alatta levő ferde sorban csupa 1-es van, a mátrix többi eleme pedig nulla. Egy mátrix **Jordan-alakú,** ha diagonális helyzetű Jordan-blokkokból áll, és a többi eleme nulla. $\mathbb{C}$ fölött minden mátrix hasonló egy Jordan-alakú mátrixhoz, ami a blokkok sorrendjétől eltekintve egyértelmű. Ennek minimálpolinomja $\prod(x-\lambda_i)^{k_i}$, ahol k_i a legnagyobb λ_i-hez tartozó Jordan-blokk mérete.

Határozzuk meg az alábbi mátrixok Jordan-alakját.

$$\begin{bmatrix}2&0&0\\1&2&0\\0&0&2\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}2&0&0\\1&2&0\\0&0&3\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}2&0&0\\1&3&0\\0&0&3\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}2&0&0&0\\1&2&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&2\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}2&0&0&0\\1&2&0&0\\0&0&2&0\\0&0&1&2\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}0&0&2\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}0&2&2\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}0&2&0\\0&0&2\\0&0&0\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}2&1\\-1&0\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}-3&-4&1\\6&9&-2\\15&24&-5\end{bmatrix}$$

Az 1, 2, 3, 5, 6 sorszámú mátrixok Jordan-alakúak. (A 2-es számú is: az diagonális, 1×1-es blokkokból áll.) A 4-es viszont nem, mert a bal felső sarok 2×2-es blokkjában a főátló két eleme nem egyenlő. Ilyenkor a minimálpolinomból következtethetünk a Jordan-blokkok számára és méretére. A 4-es mátrix esetében ez $(x-2)(x-3)$, ezért a Jordan-alak diagonális. A főátlóban két darab 3-asnak kell lennie, mert a karakterisztikus polinom $(2-x)(3-x)^2$. A 7 és 8 számú mátrixok minimálpolinomja x^2, így ezek Jordan-alakjában van egy 2×2-es blokk nulla sajátértékkel. Emellé már csak egy 1×1-es blokk fér el (nulla sajátértékkel). A 9-es mátrixnak x^3 a minimálpolinomja, ezért a Jordan alakja egy 3×3-as blokk. A 10-es mátrix minimálpolinomja $(x-1)^2$, ezért egy darab 2×2-es blokk 1 sajátértékkel. A 11-es mátrixot már diagonalizáltuk: két 0 és egy 3-as van a főátlóban. A 12-es mátrix minimálpolinomja $x^2(x-1)$, ezért egy 2×2-es 0-t tartalmazó és egy 1×1-es 1-et tartalmazó blokkja van.

Vegyük észre: az 5-os és 6-os számú mátrix minimálpolinomja $(x-2)^2$, karakterisztikus polinomja $(x-2)^4$, ezért ennek alapján nem lehet megmondani a Jordan-alakjukat. Nagyobb mátrixok esetében még rosszabb a helyzet, másmilyen algoritmust kell használni. Ezt a két mátrixot megkülönbözteti az, hogy $M-2E$ rangja az egyik esetben 1, a másikban 2.

Van-e olyan mátrix, melyre $k(x)=x^4-x^2$ és $m(x)=x^2-x$; $m(x)=x^3-x$; $m(x)=x^4-x^2$?

A karakterisztikus polinom gyökei 0, 1, -1, ezért x^2-x nem lehet a minimálpolinom, mert nem gyöke a -1. A másik két eset előfordulhat. Az x^3-x esetében egy diagonális mátrix felel meg, a főátlóban két 0, egy 1 és egy -1 szerepel. Az x^4-x^2 minimálpolinomhoz a mátrixban legyen egy 2×2-es Jordan-blokk 0 sajátértékkel, és két 1×1-es blokk ± 1 sajátértékkel.

Az alábbi mátrixok közül melyek hasonlók?

$$\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}2&0\\1&2\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}2&0\\2&2\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}2&2\\2&2\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}3&0\\0&2\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}3&0\\1&2\end{pmatrix}$$

Két mátrix akkor hasonló, ha Jordan-alakjuk a blokkok sorrendjétől eltekintve ugyanaz. Egy 2×2-es mátrix Jordan alakja vagy egy 2×2-es blokkból, vagy két 1×1-es blokkból áll. Az első esetet onnan ismerhetjük fel, hogy a minimálpolinom $(x-\lambda)^2$. A diagonalizálható esetben a főátlóban a karakterisztikus polinom két gyöke áll, amik lehetnek egyenlők is, de ekkor a minimálpolinom $x-\lambda$ lesz. A hasonlósági osztályok $\{1\}$, $\{2,3\}$, $\{4\}$, $\{5\}$, $\{6,7\}$.

Hogyan olvasható le a rang a Jordan-alakról?

A mátrix méretéből kell kivonni a nulla sajátértékhez tartozó blokkok számát.

3. További feladatok

1. *Igazoljuk, hogy ha M invertálható mátrix, akkor M^{-1} polinomja M-nek.*

A $k_M(x)$ konstans tagja nem nulla, így $k_M(M)=0$-t M^{-1}-gyel szorozva M^{-1} kifejezhető.

2. *Igazoljuk, hogy a Gauss-elimináció elvégzése után kapott mátrix sorrangja és determinánsrangja is megegyezik a vezéregyesek számával* — lásd Zábrádi Gergő jegyzetét.

3. *Igazoljuk, hogy ha $A,B\in\operatorname{Hom}(V,W)$, akkor $r(A+B)\le r(A)+r(B)$. Adjunk példát olyan esetre, amikor egyenlőség áll, és olyanra is, amikor nem.*

Ha U_1,U_2 alterek, akkor $\dim(U_1+U_2)=\dim U_1+\dim U_2-\dim(U_1\cap U_2)\le\dim U_1+\dim U_2$. Mivel $(A+B)(v)=A(v)+B(v)\in\operatorname{Im}A+\operatorname{Im}B$, ezért $\operatorname{Im}(A+B)\subseteq\operatorname{Im}A+\operatorname{Im}B$. Tehát $r(A+B)=\dim\operatorname{Im}(A+B)\le\dim(\operatorname{Im}A+\operatorname{Im}B)\le\dim\operatorname{Im}A+\dim\operatorname{Im}B=r(A)+r(B)$. *Példák:* ha $B=-A\ne 0$, akkor $r(A+B)=0$ és $r(A)+r(B)=2r(A)\ne 0$. Ha viszont A az x-tengelyre, B az y-tengelyre való merőleges vetítés a síkon, akkor $r(A)=r(B)=1$, továbbá $A+B$ a sík identitása, melynek rangja 2. (Persze $B=0$ esetén is egyenlőség áll.)

4. (**) *A hétfejű sárkány és a királylány: V/11-es feladat.*

Mindketten életben maradnak. A királylány a mátrix rangját 9-re változtatja úgy, hogy vesz egy 9×9-es részmátrixot, melynek egy b eleméhez tartozó aldeterminánsa nem nulla, és b-t megváltoztatja. A sárkány a rangot csak 8-ra tudja levinni. A húg olyan mátrixot hagy a sárkánynak, melynek egyik aldeterminánsa sem nulla, de a mátrix determinánsa nulla. Bárhogy változtat a sárkány, 8 lesz a rang.