Bsc algebra2 gyakorlat

Hatodik gyakorlat — elvek és megoldások

1. Leképezések összege és skalárszorosa

Emlékeztető: Ha $A, B : V \to W$, akkor a **pontonkénti összegük** $(A+B)(v) = A(v)+B(v)$. Például a sin és cos függvények összege az a függvény, amely az x helyen $\sin x + \cos x$-et vesz fel. Ugyanígy adtuk össze a polinomfüggvényeket is. A **pontonkénti λ-szoros** képlete $(\lambda A)(v) = \lambda A(v)$. Ezekre a műveletekre $\mathrm{Hom}(V, W)$ vektorteret alkot. Összeg mátrixa a mátrixok összege: $[A + B] = [A] + [B]$; λ-szoros mátrixa a mátrix λ-szorosa: $[\lambda A] = \lambda[A]$.

Tekintsük az alábbi transzformációkat: T az $y = x$ egyenesre tükrözés, F az origó körüli $+90$ fokos forgatás, X, illetve Y az x-tengelyre, illetve az y-tengelyre való merőleges vetítés.

(a) *Számítsuk ki, hová viszi az $F + T$ transzformáció az (x, y) pontot.*
(b) *Melyik transzformáció lesz $X + Y$, XY, F^{1867}, T^{1867}, FT, TF?*
(c) *Lineárisan függetlenek-e a T, F, FT, TF transzformációk?*
(d) *Hánydimenziós alteret generálnak az F pozitív kitevőjű hatványai?*

Mátrixokkal vagy leképezésekkel érdemes-e számolni? Az (a) esetben mátrixokkal:

$$[(F+T)(x,y)] = [F+T][(x,y)] = \big([F]+[T]\big)[(x,y)] = \left(\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 2x\end{bmatrix}.$$

A (b) kérdésben az F^{1867} kiszámítása nem praktikus mátrixokkal, viszont transzformációkkal igen: tudjuk, hogy F^4 és T^2 a helybenhagyás, ezért $F^{1867} = F^3 = F^{-1}$ a -90 fokos forgatás és $T^{1867} = T$. A többi művelet mátrixokkal is elvégezhető, az eredmények: $X + Y$ a helybenhagyás, $XY = 0$, végül FT és TF tengelyes tükrözés az y-, illetve x-tengelyre.

Az utolsó állítást érdemes meggondolni transzformációkkal is. Tudjuk geometriából, hogy két tengelyes tükrözés egymásutánja a tengelyek szögének kétszeresével való forgatás (illetve eltolás akkor, ha a két tengely párhuzamos). Ezért ha T_x az x-tengelyre tükrözés, akkor $TT_x = F$, ahonnan T-vel szorozva $TF = TTT_x = T_x$.

A (c) esetben a négy mátrix által alkotott vektorrendszerre el kell végezni a Gauss-eliminációt. Az egyes mátrixok koordinátavektora egy 4 magas oszlopvektor.

$$\begin{bmatrix}0 & 0 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1\end{bmatrix}.$$

Az utolsó két oszlop összefügg. Az első három oszlop független, a rang 3.

A (d) megválaszolását is transzformációs meggondolással kezdjük. Az F hatványai négyesével ismétlődnek, ezért a (végtelen sok helyett) elég négy mátrixot tekintetbe venni. Sőt, F^2 a középpontos tükrözés, ami $-F^4$ (az identitás ellentettje), és ezért $F^3 = -F$. Vagyis F hatványai ugyanazt az alteret generálják, mint F és F^2. Ezek (mátrixai) függetlenek, mert nem egymás skalárszorosai, ezért a generált altér dimenziója, vagyis a rendszer rangja 2.

Hánydimenziós a sík azon A lineáris transzformációinak a tere, melyekre $A\big((1,1)\big) = (0,0)$?

A mátrixok azok, ahol a sorok összege nulla. Az ilyen mátrixok altere kétdimenziós.

2. Képtér, magtér, dimenziótétel

Emlékeztető: Ha $A : V \to W$ lineáris, akkor A **képtere,** $\operatorname{Im} A$, az A *értékkészlete,* ami altér W-ben. Az A **magtere,** $\operatorname{Ker} A$, *azokból a vektorokból áll, amelyek képe W nulleleme,* ez altér V-ben. Az A pontosan akkor injektív, ha $\operatorname{Ker} A = 0$, és akkor szürjektív, ha $\operatorname{Im} A = W$. A **dimenziótétel** szerint ha V véges dimenziós, akkor $\dim \operatorname{Im} A + \dim \operatorname{Ker} A = \dim V$. Ebből következik, hogy egy véges dimenziós tér egy nem nulla lineáris transzformációja akkor és csak akkor invertálható, ha injektív, akkor és csak akkor, ha szürjektív. Ezzel még az is ekvivalens, hogy nem nullosztó, illetve hogy a determinánsa nem nulla. **A képtér dimenziója a leképezés mátrixának oszloprangja.** Ezt a **leképezés rangjának** nevezzük.

Határozzuk meg a $v \mapsto Mv$ leképezés mag- és képterét, és ezek dimenzióját.

$$M_1 : \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad M_2 : \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \quad M_3 : \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 2 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad M_4 : \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad M_5 : \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A $v \mapsto Mv$ leképezés mátrixa a szokásos bázisban éppen M, ezért a képtér dimenziója a mátrix oszloprangja. Ezeket már kiszámoltuk korábban. Az első és utolsó mátrix rangja 3, ezért a képtere 3-dimenziós, vagyis a valódi altér dimenziójáról szóló tétel miatt az egész $\mathbb{R}^3$. Ekkor a dimenziótétel miatt a magterük csak a nullából áll.

Az általános esetben a magtér az $M[x, y, z]^T = [0, 0, 0]^T$ lineáris egyenletrendszer megoldásával adható meg. **A magtér dimenziója a szabad változók száma,** a képtér dimenziója pedig a kötött változók, vagyis a karikák száma. A kettő összege az oszlopok száma, vagyis v komponenseinek a száma, ez a dimenziótétel mátrixos változatának tekinthető.

A három középső mátrix rangja egyaránt 2, tehát a magterük egydimenziós. A Gauss-elimináció általános megoldásából leolvashatjuk, hogy ezek rendre a $[z, -2z, z]^T$, $[0, z, 0]^T$, illetve $[z, 0, -z]^T$ alakú vektorokból álló alterek. A képtér kiszámításához azt kell megvizsgálni, hogy az $M[x, y, z]^T = [a, b, c]^T$ paraméteres lineáris egyenletrendszernek mely a, b, c esetén van megoldása. Az M_2 esetében a mintaszámolás a következő.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & a \\ 4 & 5 & 6 & b \\ 7 & 8 & 9 & c \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & a \\ 0 & -3 & -6 & b-4a \\ 0 & -6 & -12 & c-7a \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & (2b-5a)/3 \\ 0 & 1 & 2 & (4a-b)/3 \\ 0 & 0 & 0 & a-2b+c \end{array}\right]$$

Akkor van megoldás, ha nincs tilos sor, azaz ha az utolsó sor nem tilos, vagyis $a - 2b + c = 0$. Az M_3 és M_4 esetében a képtér elemeit $15a - 18b + 7c = 0$, illetve $a - 4b + c = 0$ adja meg.

Mennyi $\dim_{\mathbb{R}}\{f \in \mathbb{R}[x] \,:\, f(1) = f(2) = 0,\ \operatorname{gr}(f) \le 4\}$*?*

Korábban már láttuk, hogy az eredmény 3. *Új megoldás:* legyen $A(f) = [f(1), f(2)]^T \in \mathbb{R}^2$. A képtér az egész $\mathbb{R}^2$, mert $A(x-1) = [0, 1]^T$ és $A(x-2) = [-1, 0]^T$ két független vektor. Ezért a magtér dimenziója (amit a feladat kérdez) $5 - 2 = 3$.

Legyen W a V véges dimenziós vektortér tetszőleges altere. Igazoljuk, hogy V-nek létezik olyan lineáris transzformációja, amelynek W a magtere, és olyan is, amelynek W a képtere. Mikor van olyan transzformáció, amelynek W ***egyszerre*** *a magtere és a képtere?*

Lineáris leképezések konstruálására az **előírhatósági tételt** alkalmazzuk (ami majdnem ugyanaz, mint ha a mátrixukkal adnánk meg őket). Ez azt mondja ki, hogy ha egy lineáris leképezést akarunk konstruálni, akkor vegyünk egy bázist, és írjuk elő (tetszőlegesen), hogy mely vektorok legyenek az egyes bázisvektorok képei. Minden ilyen előíráshoz pontosan egy lineáris leképezés tartozik.

A feladat megoldásához legyen $b_1, \ldots, b_k$ bázis a W altérben, és egészítsük ki ezt V bázisává a $b_{k+1}, \ldots, b_n$ vektorokkal. Ha azt akarjuk, hogy W az A leképezés magtere legyen, akkor $A(b_i)$-t nullának kell választanunk $i \leq k$ esetén. De nem elég azt mondani, hogy a többi bázisvektor képét válasszuk bárhogyan nem nulla vektornak. Ha például $A(b_{k+1}) = A(b_{k+2})$, akkor $b_{k+1} - b_{k+2}$ is benne van a magtérben, amit nem szeretnénk. Elegendő ezeket a képeket függetlennek választani, például legyen $A(b_j) = b_j$, ha $j > k$. Ez a leképezés megfelelő, mert $v = \lambda_1 b_1 + \ldots \lambda_n b_n$ képe, ami $\lambda_{k+1} b_{k+1} + \ldots + \lambda_n b_n$, akkor lesz nulla, ha $\lambda_{k+1} = \ldots = \lambda_n = 0$, vagyis ha $v = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_k b_k$, és ez pontosan akkor teljesül, ha $v \in W$.

Ahhoz, hogy W a képtér legyen, például megfelel az a választás, hogy $A(b_i) = b_i$, ha $i \leq k$, és $A(b_i) = 0$ egyébként. A számolás hasonló, mint az előző esetben.

Ha W egyszerre a képtér és a magtér, akkor a dimenziótétel miatt a dimenziója fele V dimenziójának, azaz $n = 2k$. Ekkor legyen $A(b_i) = 0$, ha $i \leq k$ és $A(b_j) = b_{j-k}$, ha $j > k$.

3. További feladatok

1. Az alábbi $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ leképezések közül a lineárisaknak határozzuk meg a mag- és képterét.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad \text{képe} \quad \begin{bmatrix} x-y \\ y-z \\ z-x \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} x+y \\ 2x+z \\ 4x+2y+z \\ y+z \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} xy \\ yz \\ zx \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Az első leképezés magtere $\{[x, x, x]^T : x \in \mathbb{R}\}$, képtere azokból az $[a, b, c, 0]^T$ vektorokból áll, melyekre $a + b + c = 0$. A második magtere nulla, képtere $\{[a, b, c, d]^T : 2a + b - c = 0\}$ (számoljunk a mátrixával, ami 4×3-as). A harmadik nem tartja a $\lambda = 2$-vel szorzást.

2. Igazoljuk, hogy $AB = 0$ akkor és csak akkor, ha $\mathrm{Im}(B) \subseteq \mathrm{Ker}(A)$.

$A\big(B(v)\big) = 0$ akkor és csak akkor, ha $B(v) \in \mathrm{Ker}\, A$.

3. Mi az összefüggés A, B és AB magterei, illetve képterei között?

$\mathrm{Im}\, AB \subseteq \mathrm{Im}\, A$ és $\mathrm{Ker}\, AB \supseteq \mathrm{Ker}\, B$.

4. ***(*)*** Legyen V véges dimenziós vektortér, $A : V \to V$ pedig egy lineáris transzformáció. Ha $\mathrm{Im}(A^2) = \mathrm{Im}(A)$, következik-e ebből, hogy $\mathrm{Ker}(A^2) = \mathrm{Ker}(A)$? Igaz-e a megfordítás?

A dimenziótétel miatt $\dim V = \dim \mathrm{Im}\, A + \dim \mathrm{Ker}\, A = \dim \mathrm{Im}\, A^2 + \dim \mathrm{Ker}\, A^2$. Ha tudjuk, hogy $\mathrm{Im}\, A = \mathrm{Im}\, A^2$, akkor az egyenletből $\dim \mathrm{Ker}\, A = \dim \mathrm{Ker}\, A^2$. Az előző feladat szerint $\mathrm{Ker}\, A^2 \supseteq \mathrm{Ker}\, A$, ezért a valódi altér dimenziójáról szóló tétel szerint $\mathrm{Ker}\, A^2 = \mathrm{Ker}\, A$. A megfordítás bizonyítása ugyanez, csak az $\mathrm{Im}\, A^2 \subseteq \mathrm{Im}\, A$ összefüggést kell használni.

5. ***(*)*** Egy $A : V \to W$ lineáris leképezés magtere 100-dimenziós, és $v_1, \ldots, v_{199} \in V$ független vektorok. Legalább hány különböző van az $A(v_1), \ldots, A(v_{199})$ vektorok között?

Térjünk át a $v_1, \ldots, v_{199}$ által generált altérre. Ezen A magtere legfeljebb 100-dimenziós, ezért a képtere legalább $199 - 100$-dimenziós. A képtérben $A(v_1), \ldots, A(v_{199})$ generátorrendszer, ezért legalább 99 elemű. Ez meg is valósítható, ha $V = W$, és a $v_1, \ldots, v_{199}$ bázison A-t a következőképpen írjuk elő: $A(v_i) = v_i$, ha $i \leq 99$, különben $A(v_i) = v_1$.

6. ***(**)*** Ha $U, W \leq V$ és $A : U \oplus W \to V$, $(u, w) \mapsto u + w$, mennyi $\dim \mathrm{Ker}\, A$ és $\dim \mathrm{Im}\, A$?

$\dim(U \cap V)$, illetve $\dim(U + W)$, és így ezek összege $\dim(U \oplus W) = \dim U + \dim V$.