Bsc algebra2 gyakorlat

Ötödik gyakorlat — elvek és megoldások

1. Lineáris leképezések

Emlékeztető: Az $A : V \to W$ leképezés két **azonos test feletti** vektortér között akkor lineáris, ha az alábbi két tulajdonság teljesül.

(1) $A(v_1 + v_2) = A(v_1) + A(v_2)$ (**összegtartás**).

(2) $A(\lambda v) = \lambda A(v)$ (**λ-szoros tartása**).

Pl. a komplex konjugálás, $A(v) = \overline{v}$ összegtartó: összeg konjugáltja a konjugáltak összege. Az altérhez hasonlóan példát kell adni, ha azt gondoljuk, hogy valamelyik feltétel nem teljesül. Tipikusan a homogén lineáris képlettel megadott lelépezések lesznek lineárisak. Az összegtartás következménye, hogy a nullvektor képe a nullvektor, ezt elsőként nézzük meg. Az origót fixáló hasonlóságok (speciálisan az egybevágóságok) lineárisak.

Miért nem lineárisak az alábbi leképezések?

(*a*) *$V = \mathbb{R}$ az $\mathbb{R}$ felett, $W = \mathbb{C}$ a $\mathbb{C}$ felett, A az $1 + i$ számmal való szorzás.*

(*b*) *$V = W = \mathbb{C}$ az $\mathbb{R}$ felett, A a négyzetre emelés; az abszolút érték képzése.*

(*c*) *$V = \mathbb{R}^2$, $W = \mathbb{R}$ az $\mathbb{R}$ felett, $A(v)$ a v komponenseinek a szorzata.*

(*d*) *$V = W = \mathbb{R}^{2\times 2}$ az $\mathbb{R}$ felett, $A(M) = M^2$; $A(M) = iM$.*

(*e*) *$V = W$ a sík $\mathbb{R}$ felett, A egy eltolás; az $(1, 1)$ pontra tükrözés.*

Az (*a*) nem ugyanazon test fölötti vektorterek között megy. A (*b*)-nél $(1 + 1)^2 \neq 1^2 + 1^2$, illetve $|1+(-1)| \neq |1|+|-1|$. A (*c*) esetében $v = [1, 1]$ és $\lambda = 2$ ellenpélda, mert $2\cdot 2 \neq 2(1\cdot 1)$. A (*d*)-ben v legyen az egységmátrix és $\lambda = 2$; az $M \mapsto iM$ kivezet a vektortérből. Az $(1, 1)$-re való tükrözés a nullát nem viszi nullába, és az eltolás sem (kivéve ha helybenhagyás).

2. Leképezések mátrixa

A mátrix és a leképezés ugyanannak az éremnek a két oldala, ahhoz hasonlóan, ahogy egy geometria feladatot is meg lehet oldani elemi eszközökkel és koordinátákkal való számolással is. A leképezés működését látni lehet, sokszor így érdemes tételeket bizonyítani. A mátrix viszont a konkrét számításokhoz nélkülözhetetlen, mint például a következő feladatban. A feladatot megoldhatnánk elemi geometriai eszközökkel is, de gyorsabb áttérni mátrixokra.

---

1. *Legyen A az a z-tengely körüli 90 fokos forgatás, ami az x-tengelyt az y-tengelybe viszi, és B az a transzformáció, ami minden pontot tükröz a $(0, 0, 0)$ és $(1, 1, 1)$ pontokat összekötő egyenesre. Mi ezeknél az $(1, 2, 3)$ pont képe? Igaz-e, hogy $AB = BA$?* (Megoldás később.)

Emlékeztető. Legyen $\mathbf{b}$ bázis V-ben és $\mathbf{c}$ bázis W-ben. Ekkor az $[A]_{\mathbf{c}/\mathbf{b}}$ mátrix kiszámítása:

(1) Rajzolunk egy üres mátrixot, balra a sorok mellé odaírjuk a $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_k)$ bázis elemeit, az oszlopok tetejére pedig az $A(b_i)$ vektorokat, ahol $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_n)$.

(2) Ha $A(b_i) = \lambda_1 c_1 + \ldots + \lambda_k c_k$, akkor a $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ számokat beírjuk az i-edik oszlopba. (Lineáris egyenletrendszert kell megoldani, de a szokásos bázisban ez egyszerű.)

Az AB kompozíció mátrixa az A és B mátrixának szorzata, egy v vektor $A(v)$ képének koordinátáit pedig úgy kapjuk meg, hogy A mátrixát megszorozzuk v koordinátavektorával. Képletben $[AB]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}} = [A]_{\mathbf{d}/\mathbf{c}}[B]_{\mathbf{c}/\mathbf{b}}$ és $[A(v)]_{\mathbf{c}} = [A]_{\mathbf{c}/\mathbf{b}}[v]_{\mathbf{b}}$. A bázisokat úgy lehet megjegyezni, hogy a fenti képletekben a törtek „kiegyszerűsödnek”, például $\mathbf{d}/\mathbf{b} = (\mathbf{d}/\mathbf{c})(\mathbf{c}/\mathbf{b})$.

Írjuk fel az alábbi leképezések mátrixát a szokásos bázispárban.

(a) *$V = W = \mathbb{C}$ az $\mathbb{R}$ felett, A az 3-mal szorzás; az $1+i$-vel szorzás; a konjugálás.*
(b) *$V = \mathbb{R}^3$, $W = \mathbb{R}$ az $\mathbb{R}$ felett, $A(v)$ a v komponenseinek az összege.*
(c) *$V = W = \mathbb{R}^{2\times 2}$ az $\mathbb{R}$ felett, $A(M) = M^T$; $A(M) = 2M$; $A(M) = iM$.*
(d) *$V = \mathbb{R}[x]$ legfeljebb harmadfokú elemei, $W = \mathbb{C}$ az $\mathbb{R}$ felett, $A(f) = f(i)$.*
(e) *$V = W = \mathbb{R}[x]$ legfeljebb harmadfokú elemei az $\mathbb{R}$ felett, $A(f) = f'$ (derivált).*
(f) *$V = W$ a sík $\mathbb{R}$ felett, A az $y = x$ egyenesre tükrözés, az origó körüli $+90$ fokos, illetve α szögű forgatás; az $y = x$ egyenesre való függőleges irányú vetítés.*

Mintamegoldás (d)*-re.* Az első vektortér szokásos bázisa $(1, x, x^2, x^3)$. Ezekbe a polinomokba kell i-t helyettesíteni, és az eredményt felírni a komplex számok szokásos, valós fölötti $(1, i)$ bázisában. Például $A(x^3) = i^3 = 0 \cdot 1 + (-1) \cdot i$, ezért a mátrix negyedik oszlopába 0 és -1 kerül. Figyeljünk arra, hogy a mátrixba skalárokat (az együtthatókat) kell írni, nem vektorokat (tehát nem polinomokat, vagy ebben az esetben komplex számokat), és hogy a mátrix sorainak száma $\dim(W)$, oszlopainak száma $\dim(V)$. *Az eredmények a következők.*

$$(a)\quad \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix};\quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix};\quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\qquad (b)\quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\quad (\mathbb{R}\text{ bázisa az 1 szám.})$$

$$(c)\quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};\quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\qquad (d)\quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\qquad (e)\quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(f)\quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};\quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix};\quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Az $y = x$-re való függőleges vetítésnél egy pont képét úgy kapjuk meg, hogy a rajta átmenő függőleges egyenesnek a metszéspontját vesszük az $y = x$ egyenessel. A deriválásnál csupa legfeljebb másodfokú polinomot kapunk, így a mátrix utolsó sora nulla.

Mely geometriai transzformációk tartoznak az alábbi mátrixokhoz a szokásos bázisban?

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\quad \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Az $[A(v)] = [A][v]$ képlet alapján az (x, y) pont képét úgy kaphatjuk meg, hogy ennek koordinátavektorát, vagyis az $[x, y]^T$ oszlopvektort (balról) megszorozzuk a feladatban szereplő mátrixokkal. Például a harmadik mátrix esetében a szorzat a $[-x, -y]^T$, ez a transzformáció tehát az (x, y) pontot $(-x, -y)$-ba viszi. Ez az origóra tükrözés. A többi mátrix esetében a transzformációk rendre a következők: helybenhagyás; a nulla transzformáció; az x-tengelyre tükrözés (vessük össze a komplex konjugálás mátrixával); az origó körüli -90 fokos forgatás; az origó középpontú háromszoros nyújtás; az y-tengelyre való merőleges vetítés.

A fenti **1.** feladatban $[A] = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ és $[B] = (1/3)\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ (az $(1/3, 1/3, 1/3)$ pontra tükrözzük a bázisvektorokat). Mátrix-vektor szorzással látjuk, hogy az $(1, 2, 3)$ képe $(-2, 1, 3)$, illetve $(3, 2, 1)$. A két mátrix nem felcserélhető, ezért $AB \neq BA$.

3. Bázistranszformáció

Az A mátrixa a sík szokásos bázisában $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. *Mi a mátrixa az* $(1,1)$, $(1,2)$ *bázisban?*

Az $(1,1)$ képét úgy kapjuk meg, hogy a mátrixot megszorozzuk $[1,1]^T$-tal, az eredmény $(3,7)$. Hasonlóan $(1,2)$ képe $(5,11)$. Ezeket kell felírni az új bázisban. Az $\alpha(1,1)+\beta(1,2)=(3,7)$ megoldása $\alpha=-1$ és $\beta=4$, ezeket írjuk az új mátrix első oszlopába. A második oszlopba az $\alpha(1,1)+\beta(1,2)=(5,11)$ megoldása kerül, vagyis -1 és 6.

Oldjuk meg a feladatot a **bázistranszformáció képletével** is. Az új bázisra való áttérés S mátrixa úgy kapható, hogy a mátrix bal oldalára a régi bázist írjuk, a tetejére az újat, majd az oszlopokba olyan skalárokat, amelyek az új bázis elemeit a régi bázis elemeivel írják föl. Ekkor az új mátrixot az $S^{-1}MS$ képlet adja, ahol M a régi mátrix. A fenti esetben ez

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$$

(emlékezzünk rá, hogy kétszer kettes mátrix inverze az aldeterminánsos képlet szerint úgy kapható, hogy a főátlóban cserélünk, a mellékátlóban előjelet váltunk, és osztunk a determinánssal). Vegyük észre, hogy a bázistranszformáció képlete az előző gondolatmenetben szereplő egyenletrendszerek megoldását automatizálja, hiszen $Sx=v$ megoldása $x=S^{-1}v$.

4. További feladatok

2. ***(*)*** Ha egy transzformáció mátrixa M, mi a mátrix akkor, ha mindegyik bázisvektort (csak az első bázisvektort) a kétszeresére növeljük? És ha az első bázisvektort az első kettő összegével helyettesítjük? Mely transzformációknak ugyanaz minden bázisban a mátrixa? Melyek azok, amelyek mindegyik lineáris transzformációval felcserélhetők?

Az első esetben a mátrix nem változik. A másodikban az első sor feleződik, az első oszlop kétszereződik (az első sor első eleme nem változik). A harmadikban az első oszlophoz hozzáadódik a második oszlop, a második sorból kivonódik az első sor (m_{21}-ből $m_{21}+m_{22}-m_{11}-m_{12}$ lesz). Ha A mátrixa minden bázisban ugyanaz, akkor egy-egy bázisvektor kétszerezésével látjuk, hogy a mátrix diagonális, majd egy bázisvektor másikhoz adásával, hogy a diagonálisban csupa egyenlő elemek vannak. Ezért $[A]$ az egységmátrix skalárszorosa. A bázistranszformáció képlete szerint az utolsó kérdésre is ugyanez a válasz.

3. Legyen M az $y=x$ egyenesre való függőleges irányú vetítés mátrixa. Adjunk meg olyan K és L nem nulla, kétszer kettes valós mátrixokat, melyekre $KM=0=ML$.

A K olyan leképezés mátrixa, amelyre igaz, hogy a vetítés után alkalmazva a nulla transzformációt kapjuk. Ilyen transzformáció bármilyen egyenesre való $y=x$ irányú vetítés. Az L olyan transzformáció mátrixa, melyre igaz, hogy a függőleges vetítést utána alkalmazva nullát kapunk. Ennek megfelel egy y-tengelyre való bármilyen irányú vetítés. Ha az y-tengelyre való, $y=x$ irányú vetítés mátrixát vesszük, akkor még $K=L$ is elérhető.

4. Egy vektortérben található 1526 olyan altér, hogy semelyik kettő sem izomorf, de ennél több nem. Hány dimenziós a vektortér?

Ha $\dim(V)=n$, akkor van $0,1,\ldots,n$-dimenziós altere (vegyünk egy bázist, és hagyjunk el vektorokat), de másmilyen nincs. Két vektortér akkor izomorf, ha a dimenziójuk megegyezik, tehát $n+1$-féle páronként nem izomorf altere van. Ezért $n=1525$.