Bsc algebra2 gyakorlat

Negyedik gyakorlat — elvek és megoldások

1. Vektorrendszer rangja

---

*Az alábbi mátrixokban adjunk meg annyi lineárisan független oszlopot, ahányat csak lehet (ez az oszlopokból álló **vektorrendszer rangja**, és egyben a mátrix **oszloprangja**).*

$$M_1 : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \quad M_2 : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 2 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad M_3 : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad M_4 : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad M_5 : \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

Az M_4 oszlopai függetlenek, a rang 3. Az M_1 oszlopai összefüggenek, ezért 3 független oszlop nincs, de bármely két oszlop független, a rang 2. Az M_2-nek is van két független oszlopa, de csak az első és a harmadik ilyen, a rang szintén 2. Az M_3 rangja is 2, itt két darab kételemű független rendszer van (az első és harmadik oszlopból álló rendszer nem független). Végül az M_5 rangja 1, mindegyik oszlop önmagában független, mert nem a nullvektor, de bármely két oszlop már összefügg. Csak a nullmátrixnak lesz nulla a rangja.

Emlékeztető: Egy vektorrendszer rangja akkor k, ha van k elemű független részhalmaz, de $k+1$ elemű nincs. A fenti példákon látható, hogy sok k elemű független részhalmaz lehet. Fontos tétel, hogy **minden független részhalmaz kiegészíthető egy k elemű független részhalmazzá,** vagyis a maximális (azaz nem bővíthető) független részhalmazok mind k eleműek. Ennek oka, hogy a maximális független részhalmazok bázist alkotnak a vektorrendszer által generált altérben. Ezért a vektorrendszer rangjának az elegáns definíciója az, hogy **a rang a generált altér dimenziója.**

Vektorrendszer rangját úgy számíthatjuk ki, hogy a vektorokat koordinátázzuk, és a kapott mátrixra elvégezzük a Gauss-eliminációt. **A rang a karikák száma. Tetszőleges mátrix soraiból álló vektorrendszer rangja ugyanaz, mint az oszlopaiból álló vektorrendszer rangja.** Ezért ha a rang kiszámítása a cél, akkor (a determinánshoz hasonlóan) a sorokkal és az oszlopokkal is végezhetünk eliminációs lépéseket, a rang nem változik.

Egy $k \times n$-es mátrix rangja legfeljebb $\min(k, n)$ *lehet.* A vektorrendszer rangját nemcsak a vektorok száma korlátozza, hanem az is, hogy hány dimenziós térből választjuk őket.

Határozzuk meg $\{x+1,\ x^2+3x+2,\ x^2+6x+5\}$ rangját.

$$\text{Az } (1, x, x^2) \text{ bázisban } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ a rang 2.}$$

Másik megoldás: mindegyik polinomnak a foka legfeljebb kettő, ezért benne vannak egy háromdimenziós altérben. De mindnek gyöke a -1, így az általuk generált altér legfeljebb kétdimenziós. Van közöttük két független, ezért ez az altér kétdimenziós, és így a rang 2.

Bizonyítsuk be, hogy $r(\{v_1, v_2, v_3\}) = r(\{v_1 - 3v_2, v_2, v_3\})$.

A két vektorrendszer ugyanazt az alteret generálja, hiszen kölcsönösen egymás lineáris kombinációi. (Érdemes meggondolni, mennyivel bonyolultabb lenne azt megvizsgálni, hogy hogyan felelnek meg egymásnak a maximális független részhalmazok a két rendszer között.)

A II/12 (Seherezádés) feladat Freud, F4.7.5.

2. Alterek összege

Legyenek U és W alterek egy V vektortérben. Melyik a legszűkebb altér, amely tartalmazza U és W összes elemét? Benne kell legyenek az $u+w$ alakú vektorok, ahol $u \in U$ és $w \in W$. Könnyű belátni, hogy ezek már alteret alkotnak. Ez az U **és** W **összege,** jele $U+W$. Például a sík bármely két különböző, origón átmenő egyenes összege, a tér pedig bármely két különböző, origón átmenő sík összege. De ha egy origón átmenő síkot, és egy olyan origón átmenő egyenest veszünk, amely nincs benne ebben a síkban, akkor a tér ennek a két altérnek az összege is. Ezek metszete nulladimenziós, míg két sík metszete egydimenziós.

Igazoljuk, hogy a véges dimenziós esetben $\dim(U+W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$.

Útmutatás. Vegyük $U \cap W$ egy bázisát, egészítsük ki U egy bázisává, majd W egy bázisává. Bizonyítsuk be, hogy a kapott vektorok együtt $U+W$ bázisát alkotják *(Freud, F4.6.6).*

Adjuk meg $\mathbb{R}^4$ *megadott két-két alterének összegét és metszetét.* (a) *Az első három, illetve az utolsó három koordináta ugyanaz.* (b) *Az első három, illetve az utolsó három koordináta összege nulla.* (c) *Minden koordináta egyenlő, illetve a koordináták összege nulla.*

Általában a metszet meghatározása a könnyebb. Az (a) esetben a metszetben azok a vektorok vannak, amelyeknek mind a négy koordinátája egyenlő, ez nyilván egydimenziós. Az összeg meghatározásához adjuk össze a két altér egy-egy tipikus elemét, de **vigyázzunk arra, hogy ezek felírásakor különböző betűket használjunk!**

$$(a,b,b,b)^T + (c,c,c,d)^T = (a+c, b+c, b+c, b+d)^T$$

(helyspórolás végett az oszlopvektorokat sorvektorok transzponáltjaként írtuk fel). Így a két altér összegének elemei az $(a+c, b+c, b+c, b+d)^T$ alakú vektorok, ahol $a,b,c,d \in \mathbb{R}$.

Ez a válasz korrekt, de nem az igazi. Ebből a képletből még a dimenziót sem tudjuk könnyen leolvasni, ha pedig valaki arra kíváncsi, hogy egy adott vektor benne van-e ebben a halmazban, annak lineáris egyenletrendszert kell megoldania. Az „igazi” válasz az, hogy az összeg azokból a vektorokból áll, melyeknek a két középső koordinátája megegyezik.

Ezt meg tudjuk mutatni úgy, hogy az $(a+c, b+c, b+c, b+d)^T = (x,y,y,z)$ egyenletrendszert megoldjuk az a, b, c, d ismeretlenekre, ahol x, y, z tetszőleges paraméterek.

Az elegáns megoldás a következő. Az összeg dimenziója a fenti képlet szerint $2+2-1=3$. Ez nyilván altere azon vektorok szintén háromdimenziós terének, amelyek két középső koordinátája egyenlő. A valódi altér dimenziójáról szóló tétel szerint tehát ez a két altér egyenlő.

A (b) esetben a metszet kétdimenziós és a $(-b-c, b, c, -b-c)^T$ alakú vektorokból áll, az összeg pedig $\mathbb{R}^4$, hiszen $3+3-2=4$-dimenziós. A (c) esetben a metszet $\{0\}$, az összeg $\mathbb{R}^4$.

Egy tízdimenziós térben U_1*,* U_2*,* U_3 *kilencdimenziós alterek. Mekkora lehet a metszetük dimenziója? Adjunk példát minden lehetséges értékre.*

Mivel $U_1 \neq U_2$, az összegük valódi módon tartalmazza mindkettőt, ezért legalább tízdimenziós, és így az egész tér. Ezért $U_1 \cap U_1$ dimenziója $9+9-10=8$. Ha U_3 tartalmazza $U_1 \cap U_2$-t, akkor $U_1 \cap U_2 \cap U_3 = U_1 \cap U_2$. Ha nem, akkor $(U_1 \cap U_2) + U_3$ valódi módon tartalmazza U_3-at, ezért az egész tér, és akkor $\dim(U_1 \cap U_2 \cap U_3) = 8+9-10=7$.

Példák: A második esetre $\mathbb{R}^{10}$-ben az $x_1=0$, az $x_2=0$ és az $x_3=0$ egyenlettel megadott altér. Az elsőre az $x_1=0$, $x_2=0$, $x_1+x_2=0$ alterek. Ezeket úgy lehet megtalálni, hogy *az eredeti feladatot kisebb számokkal próbáljuk megoldani,* vagyis a háromdimenziós térben kétdimenziós alterekkel, azaz síkokkal kísérletezünk.