Mat. I. (BSc.) **Algebra1: 4. vizsgadolgozat (normál), II. rész** *2020. jan. 28.*

NÉV: ______________________ ELTE AZONOSÍTÓ: __________

II. rész (60 perc). *Minden válaszért 0 vagy 1 pont jár (negatív pontszám nincs). Indokolni nem kell. Aki elér legalább 10 pontot (és az I. részből is legalább hetet), annak a dolgozata már legalább elégséges; aki viszont nem éri el a 8 pontot, azé biztosan elégtelen (ez utóbbi esetben a harmadik részt ki sem javítjuk). A többi esetben a vizsga eredményessége a másik két részre kapott pontszámtól függ, a részletek és a ponthatárok a harmadik rész feladatlapján találhatók.*

11. Adjunk ellenpéldát az alábbi állításra. „A z és w **nem valós** komplex számokra felírt háromszög-egyenlőtlenségben akkor és csak akkor áll egyenlőség, ha z/w valós szám."

    Pl. $z = i, \; w = -i$.

12. Mennyi $(i - \sqrt{3})^{11}$ képzetes része? A végeredményben ne szerepeljen se szögfüggvény, se binomiális együttható.

    $-2^{10} (= -1024)$

13. A $\cos\alpha + i \sin\alpha$ számnak mely $0 \le \alpha < 360°$ értékekre lesz köbgyöke az első síknegyedben (a két határoló félegyenest is beleértve)?

    $0 \le \alpha \le 270°$

14. Ha $z \in \mathbb{C}$ rendje 72, akkor mennyi z^{15} inverzének a rendje?

    24

15. Mely $n > 0$ egészekre igaz, hogy egy n egyenletből és 10 ismeretlenből álló lineáris egyenletrendszernek nem lehet egyértelmű a megoldása?

    $n < 10$

16. Adjunk ellenpéldát az alábbi állításra: „ha az A és B valós mátrixokra AB és BA is értelmes, akkor $A + B$ is értelmes."

    Pl. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

17. Adjunk meg egy olyan 2×2-es valós mátrixot, melynek a négyzete nulla, de egyik eleme sem nulla.

    Pl. $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

18. Egy 3×3-as A mátrix determinánsa 5, az elemeihez tartozó előjelezett aldeterminánsokat jelölje A_{ij}. Mennyi lesz az $((A_{ij}))$ mátrix determinánsa?

    25

19. Egy ötelemű halmaz egy permutációjában k inverzió van. Hány inverzió van az inverzében?

    k

20. Egy 7×7-es determinánsban a mellékátló feletti elemek mind nullával egyenlőek, a mellékátló elemeinek szorzata 6. Mennyi a determináns értéke?

    -6

21. Egy 99 fokú valós együtthatós polinomnak maximálisan hányszoros gyöke lehet az $1+i$? Adjunk is példát, amikor a maximum eléretik.

    49, például $(x^2-2x+2)^{49}x$.

22. Az x^3+2x^2+5x+d polinom komplex gyökei u, v és w. Mik a gyökei az x^3-2x^2+5x-d polinomnak?

    $-u$, $-v$, $-w$.

23. Mi a maradék, ha $\mathbb{Z}_7$ fölött $x^{2020}-1$-et elosztjuk $2x+1$-gyel?

    3

24. Hány irreducibilis polinom szorzatára bomlik $\mathbb{R}$ fölött az $(x^{72}-1)^2$ polinom?

    74

25. Hány **triviális** kéttényezős felbontása van $\mathbb{Z}[x]$-ben a $91x^7$ polinomnak? A sorrendtől eltekintünk.

    2

26. Hány osztója van $\mathbb{Q}[x]$-ben a $8(x^5-2)^3(x-3)^7$ polinomnak? Az egységszeres osztókat **nem** különböztetjük meg.

    $(3+1)(7+1)=32$

27. Adjunk meg egy másodfokú polinomot és egy p prímet, amik mutatják, hogy a Schönemann–Eisenstein-kritériumban szükséges feltenni, hogy az x együtthatója p-vel osztható.

    Pl. $x^2+x-2=(x-1)(x+2)$ és $p=2$.

28. Adjunk ellenpéldát az alábbi állításra. „Ha egy $f\in\mathbb{Z}[x]$ polinom irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött, akkor $\mathbb{Z}$ fölött is."

    Pl. $f(x)=7x$

29. Adjunk példát olyan $f\in\mathbb{Z}_9[x]$ **normált,** másodfokú polinomra, amelynek $\mathbb{Z}_9$-ben több, mint 2 gyöke van.

    Pl. $(x-3)(x-6)$

30. Hány irreducibilis polinom szorzatára bomlik $\mathbb{Q}$ fölött az x^9+1 polinom?

    3