Mat. I. (BSc.) **Algebra1: 2. vizsgadolgozat (normál), I. rész** *2020. jan. 07.*

NÉV: ______________________ ELTE AZONOSÍTÓ: __________

I. rész (30 perc). *Minden teljesen precíz és korrekt válaszért 1 pont jár, a többiért* 0. *Indokolni nem kell. Aki itt nem ér el legalább* 7 *pontot, annak a dolgozata elégtelen, és ekkor a második és harmadik részt ki sem javítjuk.*

1. Mondjuk ki $\mathbb{C}$ fölött a polinomok azonossági tételét, azt is megfogalmazva, hogy mit jelent két polinom egyenlősége.

> Ha $f, g \in \mathbb{C}[x]$, és a hozzájuk tartozó polinomfüggvények egyenlők,
> azaz minden $r \in \mathbb{C}$ esetén $f(r) = g(r)$, akkor $f = g$,
> vagyis az f és g polinomok megfelelő együtthatói megegyeznek.
>
> (A feltétel úgy is szólhat, hogy a két polinom a fokszámuknál több helyen megegyezik.)

2. Mondjuk ki a gyöktényezők **egyszerre** való kiemelhetőségéről szóló tételt (beleértve, hogy milyen tulajdonságú gyűrű fölött érvényes).

> **Szokásos** (azaz egységelemes, kommutatív, **nullosztómentes**) R gyűrű fölött minden nem nulla polinom $f(x) = (x - b_1) \ldots (x - b_k) q(x)$ alakban írható, ahol a (nem feltétlenül különböző) $b_1, \ldots, b_k$ az f-nek az **összes** R-beli gyökei, és q-nak nincs gyöke R-ben.

3. Mondjuk ki azt az azonosságot, amely azt fejezi ki, hogy a komplex konjugálás szorzattartó.

> Ha $w, z \in \mathbb{C}$, akkor $\overline{w \cdot z} = \overline{w} \cdot \overline{z}$.

4. Írjuk föl trigonometrikus alakban az n-edik **primitív** komplex egységgyököket.

> $\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$, ahol $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ és $(k, n) = 1$.

5. Legyen $M = ((a_{ij})) \in \mathbb{C}^{k \times m}$ és $N = ((b_{ij})) \in \mathbb{C}^{m \times n}$. Írjuk föl az MN szorzatmátrix p-edik sorának q-adik elemét. Figyeljünk az összegezés határaira is.

> $\sum_{\ell=1}^{m} a_{p\ell} b_{\ell q} = a_{p1} b_{1q} + \ldots + a_{pm} b_{mq}$

6. Definiáljuk az $((a_{ij}))$ mátrix a_{23} eleméhez tartozó **előjeles** aldetermináns fogalmát.

Elhagyjuk a második sort és a harmadik oszlopot, kiszámoljuk a kapott mátrix determinánsát, az eredményt megszorozzuk $(-1)^{2+3} = -1$-gyel.

7. Mondjuk ki a permutációk előjelének szorzástételét.

Ha $f, g \in S_n$, akkor $\operatorname{sg}(f \circ g) = \operatorname{sg}(f)\operatorname{sg}(g)$

8. Írjuk föl azt a képletet, amivel az n-edfokú $\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ polinom esetében a gyökök σ_k elemi szimmetrikus polinomjának értéke az együtthatókból leolvasható.

$$\sigma_k = (-1)^k \frac{a_{n-k}}{a_n}$$

9. Adjuk meg $\mathbb{Z}[x]$ irreducibilis polinomjainak leírását ($\mathbb{Q}[x]$-re való visszavezetéssel). A primitív polinom fogalmát nem kell definiálni.

Az $f \in \mathbb{Z}[x]$ akkor és csak akkor irreducibilis $\mathbb{Z}[x]$-ben, ha vagy konstans $\mathbb{Z}$-beli prímszám, vagy pedig primitív és $\mathbb{Q}$ fölött irreducibilis.

10. Definiáljuk, mit jelent, hogy a p gyűrűelem prím. (Nem a felbonthatatlan elem fogalmát kérdezzük!)

A p akkor prím, ha nem nulla, nem egység, és minden b, c-re $p \mid bc \Rightarrow p \mid b$ vagy $p \mid c$.