Bsc algebra1 normál gyakorlat

Második zárthelyi **B** *(2019. dec. 10) — eredmények és pontozás*

1. a) Az előjel $-$, mert 9 inverzió van (1 pont). Ez abból is látszik, hogy a ciklusfelbontás (126)(45). **b)** A negyedik sor szerint kifejtve az eredmény -3 (3 pont). **c)** A mátrix determinánsa 2, ezért az eredmény $(1/2)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3/2$ (2 pont).

2. a) $\sigma_1 = -3/2$, $\sigma_2 = -1$, $\sigma_3 = 1$, $\sigma_4 = 1/2$ (1 pont). Ezért a négyzetösszeg $\sigma_1^2 - 2\sigma_2 = 17/4$ (1 pont), a reciprokösszeg pedig $\sigma_3/\sigma_4 = 2$ (1 pont). **b)** A hányados $x/2+1/2$, a maradék $-x/2-3/2$ (3 pont).

3. a) A megfelelő p prímre $p \mid 70$, ezért p csak 2, 5 vagy 7 lehet. A $p = 7$-et a főegyüttható, a $p = 2$-t a konstans tag zárja ki, hiszen $7 \mid 7$ és $2^2 \mid 140$, ezért csak $p = 5$ jöhet szóba (1 pont). Ez akkor felel meg, ha $5 \mid b$ (1 pont). **b)** $\mathbb{Q}$ fölött $(15x-15)(x^2+2x+2)$ megfelelő, mert az első tényező elsőfokú, a második másodfokú, és nincs racionális gyöke (1 pont). $\mathbb{Z}$ fölött $3 \cdot 5(x-1)(x^2+2x+2)$ a megoldás, mert a zárójelben álló polinomok primitívek is (1 pont). **c)** A tanult képlet szerint $\Phi_{20}(x) = \Phi_{10}(x^{20/10})$ (1 pont), továbbá $\Phi_{10} = \Phi_5(-x)$, ezért az eredmény $x^8 - x^6 + x^4 - x^2 + 1$ (2 pont).

4. A polinom $(x^4+x^2+x+1)^2$, hiszen $\mathbb{Z}_2$ fölött tagonként lehet négyzetre emelni (2 pont). A zárójelben lévő polinomnak gyöke az 1 (1 pont), a megfelelő gyöktényezőt például Horner elrendezéssel kiemelve $(x+1)^2(x^3+x^2+1)^2$ adódik (1 pont). Az utolsó zárójelben is irreducibilis polinom áll, mert harmadfokú, és a $\mathbb{Z}_2$ test egyik eleme, azaz 0 és 1 sem gyöke (2 pont).

5. A maradék $ax+b$ alakú (1 pont). Az x^2-x+1 polinom gyökei a hatodik primitív egységgyökök (1 pont), jelölje ezeket ε_1 és ε_2. Behelyettesítve $a\varepsilon + b = \varepsilon^4 + 1$ adódik, ahol $\varepsilon = \varepsilon_1$, illetve $\varepsilon = \varepsilon_2$, mert $2020 \equiv 4$ (6) (1 pont). De $\varepsilon^3 = -1$ miatt $\varepsilon^4 = -\varepsilon$ (2 pont), ezért a $-x+1$ polinom lesz a maradék, hiszen az ennek megfelelő a és b számokra mindkét egyenlet teljesül, és az egyenletrendszer determinánsa $\varepsilon_1 - \varepsilon_2$ nem nulla, tehát a megoldása egyértelmű (1 pont). Számolhatnánk közvetlenül is az $\varepsilon = (1 \pm i\sqrt{3})/2$ felhasználásával.

6. A gyökök és együtthatók összefüggése miatt $\sigma_1 = a+b+c = 0$, $\sigma_2 = ab+ac+bc = 4$ és $\sigma_3 = abc = -1$ (1 pont). A keresett polinom $g(x) = (x-a^2-b^2)(x-a^2-c^2)(x-b^2-c^2)$, az x együtthatója $(a^2+b^2)(a^2+c^2)+(a^2+b^2)(b^2+c^2)+(a^2+c^2)(b^2+c^2)$ (2 pont). Mivel $a^2+b^2+c^2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2 = -8$, ezért ez $(-8-a^2)(-8-b^2)+(-8-a^2)(-8-c^2)+(-8-b^2)(-8-c^2)$, beszorozva $3 \cdot 64 + 2 \cdot 8(a^2+b^2+c^2) + a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2$ (1 pont). Itt $a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2 = \sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_3 = 16$ (1 pont), ezért az eredmény $3 \cdot 64 - 2 \cdot 64 + 16 = 80$ (1 pont). *Megjegyzés:* Ha az eredeti kifejezést szoroznánk be, akkor $a^4+b^4+c^4+3(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)$ adódna. Az egyenletbe helyettesítve $a^3 = -4a-1$, ezért $a^4 = -4a^2-a$, ahonnan $a^4+b^4+c^4 = -4(a^2+b^2+c^2)-(a+b+c) = 32$, és a végeredmény $32 + 3 \cdot 16 = 80$.