

## Bsc algebra1 normál gyakorlat

Második zárthelyi A (2019. dec. 10) — eredmények és pontozás

1. **a)** Az előjel +, mert 12 inverzió van (1 pont). Ez abból is látszik, hogy a ciklusfelbontás (1426)(35). **b)** A második sor szerint kifejtve az eredmény  $-6$  (3 pont). **c)** A mátrix determinánsa 3, ezért az eredmény  $(1/3) \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1$  (2 pont).

2. **a)**  $\sigma_1 = -1/2$ ,  $\sigma_2 = -3/2$ ,  $\sigma_3 = 1/2$ ,  $\sigma_4 = 1$  (1 pont). Ezért a négyzetösszeg  $\sigma_1^2 - 2\sigma_2 = 13/4$  (1 pont), a reciprokösszeg pedig  $\sigma_3/\sigma_4 = 1/2$  (1 pont). **b)** A hányados  $x/2 + 1/2$ , a maradék  $x/2 + 3/2$  (3 pont).

3. **a)** A megfelelő  $p$  prímsre  $p \mid 42$ , ezért  $p$  csak 2, 3 vagy 7 lehet. A  $p = 7$ -et a főegyüttható, a  $p = 2$ -t a konstans tag zárja ki, hiszen  $7 \mid 7$  és  $2^2 \mid 84$ , ezért csak  $p = 3$  jöhet szóba (1 pont). Ez akkor felel meg, ha  $3 \mid b$  (1 pont). **b)**  $\mathbb{Q}$  fölött  $(10x - 10)(x^2 + x + 2)$  megfelelő, mert az első tényező elsőfokú, a második másodfokú, és nincs racionális gyöke (1 pont).  $\mathbb{Z}$  fölött  $2 \cdot 5(x - 1)(x^2 + x + 2)$  a megoldás, mert a zárójelben álló polinomok primitívek is (1 pont). **c)** A tanult képlet szerint  $\Phi_{50}(x) = \Phi_{10}(x^{50/10})$  (1 pont), továbbá  $\Phi_{10} = \Phi_5(-x)$ , ezért az eredmény  $x^{20} - x^{15} + x^{10} - x^5 + 1$  (2 pont).

4. A polinom  $(x^4 + x^3 + x^2 + 1)^2$ , hiszen  $\mathbb{Z}_2$  fölött tagonként lehet négyzetre emelni (2 pont). A zárójelben lévő polinomnak gyöke az 1 (1 pont), a megfelelő gyöktényezőt például Horner elrendezéssel kiemelve  $(x + 1)^2(x^3 + x + 1)^2$  adódik (1 pont). Az utolsó zárójelben is irreducibilis polinom áll, mert harmadfokú, és a  $\mathbb{Z}_2$  test egyik eleme, azaz 0 és 1 sem gyöke (2 pont).

5. A maradék  $ax + b$  alakú (1 pont). Az  $x^2 - x + 1$  polinom gyökei a hatodik primitív egységgyökök (1 pont), jelölje ezeket  $\varepsilon_1$  és  $\varepsilon_2$ . Behelyettesítve  $a\varepsilon + b = \varepsilon^4 - 1$  adódik, ahol  $\varepsilon = \varepsilon_1$ , illetve  $\varepsilon = \varepsilon_2$ , mert  $2020 \equiv 4 \pmod{6}$  (1 pont). De  $\varepsilon^3 = -1$  miatt  $\varepsilon^4 = -\varepsilon$  (2 pont), ezért a  $-x - 1$  polinom lesz a maradék, hiszen az ennek megfelelő  $a$  és  $b$  számokra mindkét egyenlet teljesül, és az egyenletrendszer determinánsa  $\varepsilon_1 - \varepsilon_2$  nem nulla, tehát a megoldása egyértelmű (1 pont). Számolhatnánk közvetlenül is az  $\varepsilon = (1 \pm i\sqrt{3})/2$  felhasználásával.

6. A gyökök és együtthatók összefüggése miatt  $\sigma_1 = a + b + c = 0$ ,  $\sigma_2 = ab + ac + bc = -3$  és  $\sigma_3 = abc = -1$  (1 pont). A keresett polinom  $g(x) = (x - a^2 - b^2)(x - a^2 - c^2)(x - b^2 - c^2)$ , az  $x$  együtthatója  $(a^2 + b^2)(a^2 + c^2) + (a^2 + b^2)(b^2 + c^2) + (a^2 + c^2)(b^2 + c^2)$  (2 pont). Mivel  $a^2 + b^2 + c^2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2 = 6$ , ezért ez  $(6 - a^2)(6 - b^2) + (6 - a^2)(6 - c^2) + (6 - b^2)(6 - c^2)$ , beszorozva  $3 \cdot 36 - 2 \cdot 6(a^2 + b^2 + c^2) + a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2$  (1 pont). Itt  $a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 = \sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_3 = 9$  (1 pont), ezért az eredmény  $3 \cdot 36 - 2 \cdot 36 + 9 = 45$  (1 pont). *Megjegyzés:* Ha az eredeti kifejezést szoroznánk be, akkor  $a^4 + b^4 + c^4 + 3(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2)$  adódna. Az egyenletbe helyettesítve  $a^3 = 3a - 1$ , ezért  $a^4 = 3a^2 - a$ , ahonnan  $a^4 + b^4 + c^4 = 3(a^2 + b^2 + c^2) - (a + b + c) = 18$ , és a végeredmény  $18 + 3 \cdot 9 = 45$ .