Mat. I. (BSc.) **Algebra1: 1. vizsgadolgozat (normál), I. rész** *2019. dec. 19.*

NÉV: ______________________________ ELTE AZONOSÍTÓ: ______________

I. rész (30 perc). *Minden teljesen precíz és korrekt válaszért 1 pont jár, a többiért* 0. *Indokolni nem kell. Aki itt nem ér el legalább 7 pontot, annak a dolgozata elégtelen, és ekkor a második és harmadik részt ki sem javítjuk.*

1. Írjuk föl az $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ és a $g(x) = \sum_{j=0}^{m} b_j x^j$ polinomok szorzatában az x^k együtthatóját.

$\sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i} = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \ldots + a_k b_0$

2. Mondjuk ki a gyöktényezők **egyszerre** való kiemelhetőségéről szóló tételt (beleértve, hogy milyen tulajdonságú gyűrű fölött érvényes).

Szokásos (azaz egységelemes, kommutatív, **nullosztómentes**) R gyűrű fölött minden nem nulla polinom $f(x) = (x - b_1) \ldots (x - b_k) q(x)$ alakban írható, ahol a (nem feltétlenül különböző) $b_1, \ldots, b_k$ az f-nek az **összes** R-beli gyökei, és q-nak nincs gyöke R-ben.

3. Írjuk föl a trigonometrikus alakú $r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ és $s(\cos\beta + i\sin\beta)$ komplex számok szorzatát trigonometrikus alakban.

$rs\big(\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)\big)$

4. Mondjuk ki a hatvány rendjének képletét.

$$o(z^n) = \frac{o(z)}{\big(o(z), n\big)}$$

5. Mondjuk ki az algebra alaptételét.

Minden nem konstans, komplex együtthatós polinomnak van gyöke $\mathbb{C}$-ben. **Vagy:**
Minden nem nulla $\mathbb{C}[x]$-beli polinom fölírható gyöktényezős alakban.

6. Írjuk föl az $n \times n$-es $((a_{ij}))$ determináns utolsó sora szerinti kifejtését. Az i-edik sor j-edik eleméhez tartozó, már **előjelezett** aldeterminánst jelölje A_{ij}.

$a_{n1}A_{n1} + \ldots + a_{nn}A_{nn} = \sum_{k=1}^{n} a_{nk}A_{nk}$

7. Definiáljuk az $f, g \in S_n$ kompozíciójának fogalmát.

Minden $1 \leq i \leq n$ esetén $(f \circ g)(i) = f\big(g(i)\big)$.

8. Írjuk föl az $a_1, \ldots, a_n$ (páronként különböző) helyekhez tartozó $\ell_1(x)$ **első** Lagrange-féle interpolációs **alap**polinomot (amely tehát az első helyen 1, a többi helyen nulla).

$$\frac{(x-a_2)(x-a_3)\ldots(x-a_n)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)\ldots(a_1-a_n)}$$

9. Mondjuk ki a második Gauss-lemmát (amely kapcsolatot teremt egy egész együtthatós polinom $\mathbb{Q}$ és $\mathbb{Z}$ feletti felbontásai között).

Ha $0 \neq f \in \mathbb{Z}[x]$ és $f = gh$, ahol $g, h \in \mathbb{Q}[x]$, akkor g és h megszorozható racionális számokkal úgy, hogy a kapott g_1 és h_1 polinomok egész együtthatósak legyenek, és $f = g_1h_1$ teljesüljön.

10. Definiáljuk az R gyűrűben az egység**elem** fogalmát. (Nem az egység fogalmát kell definiálni!)

Az $e \in R$ egységelem, ha minden $r \in R$ esetén $er = re = r$.