NÉV: ______________________ ELTE AZONOSÍTÓ: ____________

II. rész (60 perc). *Minden válaszért 0 vagy 1 pont jár (negatív pontszám nincs). Indokolni nem kell. Aki elér legalább 10 pontot (és az I. részből is legalább hetet), annak a dolgozata már legalább elégséges; aki viszont nem éri el a 8 pontot, azé biztosan elégtelen (ez utóbbi esetben a harmadik részt ki sem javítjuk). A többi esetben a vizsga eredményessége a másik két részre kapott pontszámtól függ, a részletek és a ponthatárok a harmadik rész feladatlapján találhatók.*

11. Ha $|z| = 2$, akkor mennyi $z + iz$ és $z - iz$ távolsága?

    4

12. Mennyi $[(-i - \sqrt{3})/2]^{129}$?

    i

13. Soroljuk föl $2 + 2i$ azon hatodik gyökeit, melyek a harmadik síknegyedbe esnek.

    $\sqrt[12]{8}(\cos 187,5° + i \sin 187,5°)$ és $\sqrt[12]{8}(\cos 247,5° + i \sin 247,5°)$.

14. Mely $n > 0$ egészekre igaz a következő? „Egy n-edik primitív egységgyök egész kitevőjű hatványainak halmazában csak egyetlen valós szám van.”

    n páratlan

15. Ha egy lineáris egyenletrendszer megoldását megkaphatjuk a Cramer-szabállyal, akkor az elimináció során hány szabad változó keletkezik?

    0

16. Legyen $M = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ és $N = (1, 2)$. Mennyi MN?

    $\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$

17. Legyen $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ és $B \in \mathbb{C}^{k\times \ell}$. Milyen feltétel mellett lesz értelmes az $AB^T + A$ kifejezés?

    $n = k = \ell$.

18. Az M invertálható mátrix minden elemét $1 + i \in \mathbb{C}$-vel megszorozzuk. Hogyan változik az inverze?

    Szorzódik $(1 - i)/2$-vel.

19. Adjunk meg egy olyan permutációt S_5-ben, amelyben 8 inverzió van.

    $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

20. A 4×4-es $((a_{ij}))$ determináns második és negyedik oszlopa egyenlő. Az $a_{14}a_{22}a_{31}a_{43}$ tagot melyik tag ejti ki biztosan?

    $a_{12}a_{24}a_{31}a_{43}$

21. Adjunk meg egy olyan ötödfokú $f \in \mathbb{R}[x]$ polinomot, melynek nincs racionális gyöke, és kétszeres gyöke az $1-i$.

$(x-\sqrt{2})(x-1-i)^2(x-1+i)^2$.

22. Adjunk példát két olyan $\mathbb{Z}_3$ fölötti polinomra, melyekhez tartozó polinomfüggvények egyenlők, de az egyiknek tízszeres, a másiknak hússzoros gyöke a 2.

Pl. $x(x-1)(x-2)^{10}$ és $x(x-1)(x-2)^{20}$.

23. Egy komplex feletti harmadfokú polinom gyökeinek mindhárom elemi szimmetrikus kifejezése 1. Határozzuk meg a polinom gyökeit.

1, i, $-i$.

24. Adjunk példát olyan $f, g \in \mathbb{Z}[x]$ polinomokra, melyeket $\mathbb{Q}[x]$-ben maradékosan elosztva a maradék $x/2+1$ lesz.

Pl. $f(x) = x^2+x+1$ és $g(x) = 2x^2+x$.

25. Hány irreducibilis polinom szorzatára bomlik kompex fölött a $\Phi_{100}(x)$ körosztási polinom?

$\varphi(100) = 40$.

26. Adjunk meg egy tizedfokú $\mathbb{Q}$ fölötti polinomot, mely reducibilis, de nincs racionális gyöke.

Pl. $(x^3-2)(x^7-2)$.

27. Legyen $f(x) = (1/10)x^7 + x + 2$. Hogyan alkalmazható a Schönemann–Eisenstein-kritérium annak megmutatására, hogy f irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött? Mi a prím?

$10f(x)$-re alkalmazható $p = 5$-tel, mert $f(x)$ irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött $\iff$ $10f(x)$ az.

28. Mik azok az egész együtthatós polinomok, melyek $\mathbb{Z}$ felett irreducibilisek, de $\mathbb{Q}$ felett nem?

A konstans prímszámok.

29. Mely $b \in \mathbb{Z}_6$ esetében lesz b és $b-1$ is nullosztó? (Az összeset fel kell sorolni.)

$b = 3, 4$

30. Bontsuk $\mathbb{Z}_7$ fölött irreducibilisek szorzatára az $x^7 - x$ polinomot.

$x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)(x-6)$