Bsc algebra1 normál gyakorlat

Első zárthelyi **A** *(2019. okt. 22) — eredmények és pontozás*

1. a) A Horner-elrendezést kétszer alkalmazva az eredmény $\big(x-(-2/3)\big)^2(27x-9)$, tehát a $-2/3$ kétszeres gyök (2 pont). **b)** A racionális gyökteszt szerint a lehetséges gyökök ± 1, $\pm 1/2$, $\pm 1/4$, $\pm 1/8$ (1 pont). Pozitív gyök nincs, mert a polinom minden együtthatója pozitív. Behelyettesítve látjuk, hogy a $-1/2$ gyök. A gyöktényezőt Hornerrel kiemelve és a másodfokú egyenletet megoldva az egyetlen gyök $-1/2$, ami háromszoros (2 pont). **c)** A nevező konjugáltjával bővítve a hányados $(2/5)-(1/5)i$, abszolút értéke $1/\sqrt{5}$ (1 pont).

2. a) A megoldóképletből a négyzetgyök alatti szám $3+4i$ (1 pont), négyzetgyöke $\pm(2+i)$ (1 pont), a megoldások $i-1$ és $2i+1$ (1 pont). **b)** A szám trigonometrikus alakja $\sqrt{6}(\cos 225^\circ + i\sin 225^\circ)$ (1 pont). Legyen $r=\sqrt[6]{6}$, akkor a köbgyökök a következők: $r(\cos 75^\circ + i\sin 75^\circ)$, első síknegyed; $r(\cos 195^\circ + i\sin 195^\circ)$, harmadik síknegyed; $r(\cos 315^\circ + i\sin 315^\circ)$, negyedik síknegyed (1 pont). **c)** Mivel $318/360 = 53/60$, ahol $(53,60)=1$, ezért a rend 60 (1 pont).

3. a) Gauss-eliminációval számolva $(x,y,z)=(z-1,3-2z,z)$ az általános megoldás egy lehetséges paraméterezése (3 pont). **b)** $\begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}$ (1 pont). **c)** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ (2 pont).

4. Ha $z=x+iy$, akkor a két oldalt kiszámolva és négyzetre emelve kapjuk, hogy $(x-1)^2+y^2=y^2$ (3 pont). Innen $x=1$ és y tetszőleges (1 pont), azonban ennek az egyenesnek csak azok a pontjai felelnek meg, ahol $y\geq 0$, hiszen az egyenlet bal oldala mindig nemnegatív (2 pont).

5. Mindkettő lehetséges. Legyen $f(x)=(x-1)^2u(x)$ és $g(x)=(x-1)^2v(x)$, ahol $u(1)\neq 0\neq v(1)$. Ekkor $h(x)=u(x)+v(x)-(x-1)^2u(x)v(x)$-nek kell, hogy az 1 egyszeres, illetve háromszoros gyöke legyen. Ha $u(x)+v(x)$-nek egyszeres gyöke, akkor $h(x)$-nek is egyszeres, például $f(x)=(x-1)^2$ és $g(x)=(x-1)^2(x-2)$ megfelelő (2 pont). A feladat másik feléhez szükséges, hogy az 1 pontosan kétszeres gyöke legyen $u(x)+v(x)$-nek, legyen $u(x)+v(x)=(x-1)^2w(x)$. Ekkor $h(x)=(x-1)^2k(x)$, ahol $k(x)=w(x)-u(x)\big((x-1)^2w(x)-u(x)\big)$. Tehát ha $w(x)+u(x)^2$-nek egyszeres gyöke az 1, akkor ez megfelelő. Ezt elérhetjük például, ha $u(x)=1$ és $w(x)=x-2$. Ekkor $v(x)=(x-1)^2(x-2)-1$. Azaz $f(x)=(x-1)^2$ és $g(x)=(x-1)^4(x-2)-(x-1)^2$ (4 pont).

6. Az összes, vagyis mind a 2019 gyök az egységkör belsejében van. (Nincs többszörös gyök, tehát ez 2019 különböző szám, de ez nem volt kérdés.) Ha ugyanis z olyan gyök, amire $|z|\geq 1$, akkor a háromszög-egyenlőtlenség miatt $2019|z|^{2019}=|-z-2|\leq |z|+2$, másrészt $|z|^{2019}\geq |z|$, összesítve $2019|z|\leq |z|+2$, ahonnan $|z|\leq 2/2018<1$, ami ellentmondás (6 pont). (A feladat iránt mélyebben érdeklődőknek érdemes megismerkedniük Rouché komplex függvénytani tételével.)