

Bsc algebra1 gyakorlat
Első zárthelyi A (2019. okt. 22)

Mindegyik feladatban **indoklás szükséges**, a pusztá eredményért nem jár pont. A feladatok 6 pontosak. Az első három feladatból összesen legalább 4+4+4 pontot kell szerezni, különben az eredmény elégtelen. Ha ez sikerült, akkor a ZH jegye az összpontszám hatoda. Semmilyen segédeszközt (kalkulátort, mobiltelefont) nem szabad használni. Minden feladat **új oldalon** kezdődjön. Kérjük, hogy a szerző nevét és NEPTUN-kódját, valamint a gyakorlatvezető nevét **minden lapra OLVASHATÓ nyomtatott nagybetűkkel** írják fel.

1. (2 + 3 + 1 pont)

a) Döntsük el, hogy a $27x^3 + 27x^2 - 4$ polinomnak hány-szoros gyöke a $-2/3$, és emeljük is ki az ehhez tartozó gyöktényezőt, ahány-szor csak lehet.

b) Határozzuk meg $8x^3 + 12x^2 + 6x + 1$ racionális gyökeit.

c) Számítsuk ki az $(2 + i)/(3 + 4i)$ hányadost, és ennek az abszolút értékét.

2. (3 + 2 + 1 pont)

a) Oldjuk meg a $z^2 - 3iz - 3 - i = 0$ egyenletet \mathbb{C} -ben. (A komplex négyzetgyökvonást is el kell végezni.)

b) Egyenként soroljuk föl (trigonometrikus alakban) és ábrázoljuk a $-\sqrt{3} - \sqrt{3}i$ szám harmadik gyökeit. Írjuk oda mindegyikhez, hogy hányadik síknegyedbe esik.

c) Mennyi $\cos(318^\circ) + i \sin(318^\circ)$ rendje?

3. (3 + 1 + 2 pont)

a) Adjuk meg Gauss-eliminációval az alábbi egyenletrendszer általános megoldását:

$$\begin{array}{rcl} 2x + 2y + 2z & = & 4 \\ -3x & + & 3z = 3 \\ 3x + 6y + 9z & = & 15 \end{array}$$

b) Számítsuk ki az $AA^T - B$ mátrixot, ahol $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ és $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$.

c) Számítsuk ki $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ inverzét.

4. Határozzuk meg és ábrázoljuk a $|\bar{z} - 1| = \operatorname{Im} z$ egyenlet megoldásainak halmazát a komplex számsíkon.

5. Az f és g polinomoknak (pontosan) kétszeres gyöke az 1. Lehet-e (pontosan) háromszoros, illetve (pontosan) ötszörös gyöke az 1 az $f + g - fg$ polinomnak? Minden lehetségesnek gondolt értékre példapolinomot is kell adni.

6. Hány gyöke van (multiplicitásokkal számolva) a $2019z^{2019} + z + 2$ polinomnak a komplex egységkör belsejében?