Bsc algebra1 normál gyakorlat

Mintazárthelyi II (2019 ősz) — eredmények és pontozás

1. a) Az előjel $+$, mert 10 inverzió van (1 pont). Ez abból is látszik, hogy a ciklusfelbontás (12536). **b)** A harmadik, majd a második sor szerint kifejtve az eredmény -4 (3 pont). **c)** A mátrix determinánsa 2, ezért az eredmény $-(1/2)\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2$ (2 pont).

2. a) $\sigma_1 = 1/2$, $\sigma_2 = 2$, $\sigma_3 = 3/2$, $\sigma_4 = 1$ (1 pont). Ezért a négyzetösszeg $\sigma_1^2 - 2\sigma_2 = -15/4$ (1 pont), a reciprokösszeg pedig $\sigma_3/\sigma_4 = 3/2$ (1 pont). **b)** A hányados $x/2$, a maradék $5x/2$ (3 pont).

3. a) A megfelelő p prímre $p \mid 30$, ezért p csak 2, 3 vagy 5 lehet. A $p = 2$-t a főegyüttható, a $p = 3$-at a konstans tag zárja ki, hiszen $2 \mid 2$ és $3^2 \mid 90$, ezért csak $p = 5$ jöhet szóba (1 pont). Ez akkor felel meg, ha $5 \mid b$ (1 pont). **b)** $\mathbb{Q}$ fölött $(21x-21)(x^2+x+1)$ megfelelő, mert az első tényező elsőfokú, a második másodfokú, és nincs racionális gyöke (1 pont). $\mathbb{Z}$ fölött $3 \cdot 7(x-1)(x^2+x+1)$ a megoldás, mert a zárójelben álló polinomok primitívek is (1 pont). **c)** A tanult képlet szerint $\Phi_{54}(x) = \Phi_6(x^{54/6}) = (x^9)^2 - x^9 + 1 = x^{18} - x^9 + 1$ (2 pont).

4. A maradék $ax^2 + bx + c$ alakú (1 pont). Az $x^3 - 1$ polinom gyökei a harmadik egységgyökök, azaz 1, ε_1 és ε_2 (1 pont). Ezeket behelyettesítve $a+b+c = 0$ (1 pont) és $a\varepsilon^2 + b\varepsilon + c = \varepsilon - 1$ adódik, ahol $\varepsilon = \varepsilon_1$, illetve $\varepsilon = \varepsilon_2$, mert $2020 \equiv 1$ (3) (1 pont). Ezért láthatjuk, hogy az $x - 1$ polinom lesz a maradék, hiszen az ennek megfelelő a, b, c számokra mindhárom egyenlet teljesül (1 pont), és az egyenletrendszer determinánsa Vandermonde-féle, nem nulla, és így a megoldása egyértelmű (1 pont). (Az utolsó két pontot természetesen az egyenletrendszer közvetlen megoldásával is meg lehet szerezni. A számolást ebben az esetben rövidítik az $\varepsilon_1^2 = \varepsilon_2$, $\varepsilon_2^2 = \varepsilon_1$ összefüggések, és az a tény is, hogy a, b, c valós számok, hiszen a kiinduló polinomok valós együtthatósak.)

5. A polinomnak gyöke az 1 (1 pont). A megfelelő gyöktényezőt például Horner elrendezéssel kétszer kiemelve $(x+1)^2(x^3+x+1)$ adódik (2 pont). Az utolsó zárójelben is irreducibilis polinom áll, mert harmadfokú, és a $\mathbb{Z}_2$ test egyik eleme, azaz 0 és 1 sem gyöke (3 pont).

6. A gyökök és együtthatók összefüggése miatt $\sigma_1 = a + b + c = -5$, $\sigma_2 = ab + ac + bc = 0$ és $\sigma_3 = abc = -1$ (1 pont). A keresett polinom $g(x) = (x-a-b)(x-a-c)(x-b-c)$, konstans tagja $-(a+b)(a+c)(b+c)$, a beszorzást elvégezve az eredmény $-2abc - (a^2b + a^2c + b^2c + ab^2 + ac^2 + bc^2)$ (2 pont). Ugyanakkor $0 = \sigma_1\sigma_2 = a^2b + a^2c + b^2c + ab^2 + ac^2 + bc^2 + 3abc$ (2 pont). Innen a végeredmény $2 - 3 = -1$ (1 pont). *Második megoldás:* Mivel $\sigma_1 = a + b + c = -5$, ezért például $a + b = -c - 5$, és így $g(x) = (x+a+5)(x+b+5)(x+c+5)$ (3 pont). A konstans tag tehát $(a+5)(b+5)(c+5) = abc + 5\sigma_2 + 25\sigma_1 + 125 = -1 + 0 - 125 + 125 = -1$ (3 pont).