Bsc algebra1 gyakorlat

Tizedik és tizenegyedik előadás-dia

1. ***(3.9.4, 3.9.11)*** Számítsuk ki Φ_{12}-t és a prímhatvány-indexű körosztási polinomokat.

2. ***(3.9.18)*** Határozzuk meg a körosztási polinomok felhasználásával a 12-edik, a 18-adik illetve a 24-edik primitív egységgyökök összegét és szorzatát.

3. ***(3.9.12)*** Igazoljuk, hogy ha $n > 1$ páratlan, akkor $\Phi_{2n}(x) = \Phi_n(-x)$.

4. ***(3.9.15*)*** Legyenek $m \mid n$ pozitív egészek úgy, hogy n minden prímosztója osztja m-et is. Igazoljuk, hogy $\Phi_n(x) = \Phi_m(x^{n/m})$.

5. ***(3.9.16)*** Számítsuk ki az előző feladat alapján a $\Phi_n(x)$-et, ha $n = 36, 72, 144, 100$.

6. ***(**)*** Van-e olyan n, melyre $\Phi_n(x)$-nek van 1-nél nagyobb abszolút értékű együtthatója?

7. ***(3.9.14**)*** Bizonyítsuk be, hogy $\Phi_n(x) = \prod_{d|n}(x^{n/d} - 1)^{\mu(d)}$, ahol μ a Möbius-függvény.

8. ***(3.9.19, 3.20**)*** Mennyi $\Phi_n(1)$, illetve $\Phi_n(-1)$?

9. ***(3.9.21**)*** Igazoljuk, hogy ha m és n relatív prímek, akkor $\Phi_{mn}(x) = \prod_{o(\eta)=m} \Phi_n(\eta x)$, kivéve az $m = 2$, $n = 1$ esetben, amikor a két oldal egymás ellentettje.

10. ***(3.9.23**)*** Legyen p prímszám, és $n = p^k m$, ahol már $p \nmid m$. Mutassuk meg, hogy modulo p a Φ_n egyenlő a $\Phi_m^{\varphi(p^k)}$ polinommal.

11. ***(3.9.25**)*** Igazoljuk, hogy a Φ_n polinom egy alkalmas eltoltjára akkor és csak akkor teljesül a Schönemann–Eisenstein-kritérium feltétele, ha n prímhatvány, vagy egy páratlan prímhatvány kétszerese.

12. ***(3.9.26***)*** Mely $n \geq 3$ egészekre létezik olyan n-szög a síkon, amelynek minden szöge egyenlő, és az oldalai valamilyen sorrendben $1, 2, \ldots, n$ egység hosszúak?

---

13. ***(1.1.8, 1.1.9)*** Írjuk föl a modulo 5 és a modulo 6 összeadás és szorzás táblázatát. Végezzük el a $2:3$ osztást modulo 5. Tudunk-e osztani $\mathbb{Z}_5$ minden nem nulla elemével? Igaz-e, hogy szorzat csak akkor nulla, ha valamelyik tényezője nulla? Mi a helyzet modulo 6?

14. Hány nullosztó van $\mathbb{Z}_4$-ben? Hát $\mathbb{Z}_4[x]$-ben?

15. ***(2.2.32)*** Határozzuk meg a $\mathbb{Z}_m$ gyűrűben a nullosztókat és az invertálható elemeket.

16. Adjunk meg egy olyan másodfokú $f \in \mathbb{Z}_6[x]$ polinomot, melyre $(3x+1)f(x)$ foka 2.

17. Adjunk példát, ami mutatja, hogy $\mathbb{Z}_6$ fölött nem igaz a polinomok azonossági tétele.

18. Hány olyan legföljebb negyedfokú polinom van $\mathbb{Z}_2[x]$-ben, mely minden helyen 1?

19. Bontsuk $\mathbb{Z}_2$ fölött gyöktényezős alakra az $x^8 + 1$ polinomot.

20. Végezzük el az $(x^6 + x + 1) : (x^2 + x + 1)$ maradékos osztást $\mathbb{Z}_2$ fölött.

21. Bontsuk $\mathbb{Z}_2$ fölött irreducibilisek szorzatára az $x^6 + x^5 + x^2 + 1$ polinomot.

---

22. ***(2.2.4, 2.2.7)*** Igazoljuk, hogy a kompozíció asszociatív. Mi az egységelem? Adjunk példát két geometriai transzformációra, ami mutatja, hogy a kompozíció nem kommutatív.

23. ***(2.2.35)*** Az alábbi struktúrák gyűrűk-e? Ha igen, kommutatívak-e, egységelemesek-e, nullosztómentesek-e, testek-e? Amelyek gyűrűk, azokban mik az invertálható elemek?

(1) $\{a + bi \,:\, a, b \in \mathbb{Q}\}$ a szokásos összeadásra és szorzásra nézve.
(2) $\mathbb{G} = \{a + bi \,:\, a, b \in \mathbb{Z}\}$ a szokásos összeadásra és szorzásra nézve (*Gauss-egészek*).
(3) $\{a + b\sqrt{2} \,:\, a, b \in \mathbb{Q}\}$ a szokásos összeadásra és szorzásra nézve.
(4) $\{a + b\sqrt[3]{2} \,:\, a, b \in \mathbb{Q}\}$ a szokásos összeadásra és szorzásra nézve.
(5) A páratlan, illetve a 2-hatvány nevezőjű törtek $\mathbb{Q}$ műveleteire nézve.
(6) Egy X halmaz összes részhalmaza, ahol az összeadás a szimmetrikus differencia képzése, a szorzás pedig a metszetképzés. (Két halmaz szimmetrikus differenciája azokból az elemekből áll, amelyek a két halmaz közül pontosan egyben vannak benne.)

24. ***(2.2.36)*** Mutassuk meg, hogy a $\mathbb{Z}_6$ gyűrűben $R = \{0, 2, 4\}$ részgyűrűt alkot. Egységelemes gyűrű-e, illetve test-e az R gyűrű?

25. ***(2.2.41)*** Legyen R kommutatív, egységelemes gyűrű, és tekintsük az $a+bi$ alakú formális kifejezéseket, ahol $a, b \in R$ (az R fölötti komplex számokat). A műveleteket ugyanúgy végezzük, mint a közönséges komplex számokkal. Testet kapunk-e, ha $R = \mathbb{Z}_3$? És ha $R = \mathbb{Z}_5$?

26. ***(2.2.20*)*** Igazoljuk az $a^m a^n = a^{m+n}$ és az $(a^m)^n = a^{mn}$ azonosságokat tetszőleges egységelemes gyűrű a invertálható elemére (m és n egészek, de lehetnek negatívak is).

27. ***(2.2.37*)*** Legyen R gyűrű, $r, s \in R$, és m, n egész számok. Igazoljuk az alábbiakat.

(1) $(-n)r$ az nr ellentettje.
(2) $mr + nr = (m + n)r$.
(3) $n(mr) = (nm)r$.
(4) $n(r + s) = nr + ns$.
(5) $n(rs) = (nr)s = r(ns)$.

28. ***(2.2.40**)*** Jelölje $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ az $a + b\sqrt{2}$ alakú számok gyűrűjét a $\mathbb{C}$-beli összeadásra és szorzásra, ahol $a, b \in \mathbb{Z}$. Igazoljuk, hogy ebben végtelen sok invertálható elem van.

---

29. ***(3.7.9**)*** Legyenek $f(x) = ax^2 + bx + c$ gyökei α_1 és α_2. Mutassuk meg, hogy f diszkriminánsa $a^2(\alpha_1 - \alpha_2)^2 = b^2 - 4ac$, vagyis a megoldóképletben a négyzetgyök alatt álló kifejezés. Ennek alapján igazoljuk, hogy egy $f \in \mathbb{R}[x]$ polinomnak pontosan akkor valósak a gyökei, ha a diszkriminánsa nemnegatív.

30. ***(3.7.10**)*** Legyen $f(x) = x^3 + px + q$. Igazoljuk, hogy f diszkriminánsa $-27q^2 - 4p^3$, vagyis a Cardano-képletben a négyzetgyök alatt álló D kifejezés -108-szorosa.

31. ***(3.7.12**)*** A rezultáns módszerével vezessük vissza az alábbi egyenletrendszereket egyismeretlenes egyenletre, és oldjuk is meg őket $\mathbb{C}$ fölött. A számításokhoz a `Maple` program `resultant` és `factor` parancsait használjuk.

$$\begin{cases} (x-1)\cdot y^2 + (x+1)\cdot y - 2 = 0 \\ (x-1)\cdot y^2 + x\cdot y - 1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} (x-1)\cdot y^2 + (x+1)\cdot y - 1 = 0 \\ (x-1)\cdot y^2 + x\cdot y - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 = y + z + 1 \\ y^2 = z + x + 1 \\ z^2 = x + y + 1 \end{cases}$$