

Bsc algebra1 gyakorlat
Kilencedik és tizedik előadás-dia

1. **(3.2.16)** Osszuk el maradékosan az $x^3 - 2$ polinomot $2x^2 + 2x - 3$ -mal.
 2. **(3.2.23)** Mi a maradék, ha $x^4 + x^2 + 1$ -et osztjuk $x^2 + x + 1$ -gyel? Az eredményt indokoljuk meg számolás nélkül is, majd vizsgáljuk meg, hogy $x^{2n} + x^n + 1$ mikor osztható $x^2 + x + 1$ -gyel.
 3. **(3.2.24)** Mi a maradék, ha $x^{64} + x^{54} + x^{14} + 1$ -et osztjuk $x^2 + 1$ -gyel, illetve $x^2 - 1$ -gyel?
 4. Az $f(x) : (x^2 + 1)$ maradékos osztásnál a maradék $x + 1$. Határozzuk meg $f(i)$ értékét.
 5. **(3.2.17)** Állapítsuk meg az $f(x) = 3x^3 + 6x^2 + 6x + 3$ és a $g(x) = 2x^4 + 2x^2 + 2$ polinomok kitüntetett közös osztóját az euklideszi algoritmussal.
 6. Mi lesz $x^5 + 1$ és $x^{15} - 1$ legnagyobb közös osztója?
 7. **(3.3.15)** Mi lesz $x^n - 1$ és $x^m - 1$ legnagyobb közös osztója?
-
8. **(3.1.29)** Igaz-e a $2x \mid 3x^2$ oszthatóság rendre a \mathbb{C} , \mathbb{R} , \mathbb{Q} , \mathbb{Z} fölötti polinomok körében?
 9. **(3.3.14)** Bontsuk $6(x^2 - 2)(x^2 + 1)$ -et \mathbb{C} , \mathbb{R} , \mathbb{Q} , \mathbb{Z} fölött felbonthatatlanok szorzatára.
 10. Bontsuk a $2x^4 - 4$ polinomot irreducibilisek szorzatára \mathbb{C} és \mathbb{R} fölött.
 11. Bontsuk az $x^{12} - 4096$ polinomot irreducibilisek szorzatára $\mathbb{C}[x]$ -ben és $\mathbb{R}[x]$ -ben.
-
12. **(3.5.4)** A Schönemann-Eisenstein kritérium az alábbi polinomok közül melyekre alkalmazható közvetlenül: $x^{11} + 2x + 18$, $x^{11} + 2x + 12$, $x^{11} + 12x + 5$, $x^{11} + n$ (mely n -ekre?).
 13. **(3.5.5)** Legyen f racionális együtthatós polinom. Igazoljuk, hogy f pontosan akkor irreducibilis \mathbb{Q} fölött, ha valamelyik eltoltja (vagyis az $f(x+c)$ polinom, ahol $c \in \mathbb{Q}$) irreducibilis \mathbb{Q} fölött. Igazoljuk ennek segítségével, hogy $x^4 + 1$ irreducibilis \mathbb{Q} fölött.
 14. **(3.5.10)** Felbonthatatlan-e $\mathbb{Z}[x]$ -ben az $x^4 + x + 1$ polinom?
 15. **(3.5.11*)** Legyen p egy prímszám, $f \in \mathbb{Z}[x]$ egy n -edfokú polinom, ahol $n \geq 1$, és $0 < k < n$. Legyen $\bar{f} \in \mathbb{Z}_p[x]$ az f modulo p véve. Az alábbi állítások közül melyek igazak?
 - (1) Ha f irreducibilis \mathbb{Z} fölött, akkor \bar{f} irreducibilis \mathbb{Z}_p fölött.
 - (2) Ha \bar{f} irreducibilis \mathbb{Z}_p fölött, akkor f irreducibilis \mathbb{Q} fölött.
 - (3) Ha \bar{f} irreducibilis \mathbb{Z}_p fölött, és \bar{f} foka n , akkor f irreducibilis \mathbb{Z} fölött.
 - (4) Ha \bar{f} irreducibilis \mathbb{Z}_p fölött, és \bar{f} foka n , akkor f irreducibilis \mathbb{Q} fölött.
 - (5) Ha f -nek van \mathbb{Z} fölött k -adfokú tényezője, akkor \bar{f} -nak is van k -adfokú tényezője.
 - (6) Az előző állítás akkor, ha azt is tudjuk, hogy \bar{f} foka n .
 16. **(3.5.6)** A $6x^4 + 3x + 1$ polinomot a 3 prímszám segítségével vizsgálva igazoljuk, hogy irreducibilis \mathbb{Q} fölött. A kapott gondolatmenetet próbáljuk meg általánosítani.
 17. Bontsuk $x^5 - 2x^4 + 3x^3 + 10x^2 - 2x + 1$ -et irreducibilisek szorzatára \mathbb{Q} fölött.
 18. **(3.5.14)** Irreducibilis-e \mathbb{Z} fölött $x^5 + 5x + 26$, $3x^7 + 6x - 18$, $x^6 + 1$, $x^3 + 7x - 3$, $x^4 + 3x^3 + x^2 + 1$?

19. (3.5.15*) Irreducibilisek-e az alábbi polinomok a \mathbb{Q} test fölött? $3x^7 - 6x^6 + 6x^2 + 3x - 2$, $3x^7 + x^6 + 6x^2 + 2x - 2$, $3x^7 - 6x^6 + 6x^2 + 2x - 2$, $x^{16} + 1$, $x^{16} + 2$, $x^4 - 14x^2 + 9$, $x^4 - x^2 + 1$, $3x^7 + 6x - 18$, $x^5 + 4$, $x^3 + 9$, $x^5 + 729$, $x^{10} - x^5 + 1$, $x^{20} + 20$, $x^4 + 25$, $x^6 + 32$, $x^4 + 4x + 1$, $x^4 - 2x + 1$, $x^4 + x^3 + 1$, $x^4 + x^3 + 4$, $x^4 + x^3 + x^2 + 1$.

20. (3.3.21) Határozzuk meg a legfeljebb negyedfokú irreducibilis polinomokat \mathbb{Z}_2 felett.

21. (3.9.22) Bontsuk az $x^{12} - 1$ polinomot irreducibilisek szorzatára \mathbb{Z} , \mathbb{Z}_2 , \mathbb{Z}_3 és \mathbb{Z}_5 felett.

22. (3.5.9) Az $x^4 + x^2 + x + 1$ -et \mathbb{Z}_2 felett vizsgálva igazoljuk, hogy irreducibilis \mathbb{Q} felett.

23. (3.3.19) Irreducibilis-e $x^4 + 4$ illetve $x^4 + 9$ a \mathbb{Q} fölött? Általánosítsunk!

24. (3.3.24)** Bontsuk fel $x^4 - 10x^2 + 1$ -et \mathbb{R} fölött felbonthatatlanok szorzatára (segítség: a polinomnak gyöke a $\sqrt{2} + \sqrt{3}$). A kapott felbontást, és az alaptétel egyértelműségi állítását kihasználva adjuk meg a \mathbb{Q} fölötti felbontást is. Bizonyítsuk be, hogy ennek a polinomnak semelyik eltoltja sem teljesíti a Schönemann–Eisenstein-kritérium feltételét.

25. (3.3.22)** Bizonyítsuk be, hogy ha p prímszám, akkor az $(x + y)^p - x^p - y^p$ polinom osztható p -vel $\mathbb{Z}[x, y]$ -ban. Vezessük le ebből a kis Fermat-tételt.

26. (3.5.15)** Legyen p prím és $f(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^{p-1}$. Alkalmazható-e az $f(x + 1)$ polinomra a Schönemann–Eisenstein?

27. (3.5.16)** Legyen $f(x, y) = x^9 + x^3y^3 + y^2 + y \in \mathbb{C}[x, y]$, és jelölje $\mathbb{C}(y)$ a $g(y)/h(y)$ alakú racionális törtfüggvényekből álló testet ($g, h \in \mathbb{C}[y]$).

(1) Primitív-e f , mint $\mathbb{C}[y]$ fölötti polinom?

(2) Következik-e a Schönemann–Eisenstein-tételből, hogy f irreducibilis $\mathbb{C}(y)$ fölött?

(3) Irreducibilis-e f a $\mathbb{C}[x, y]$ -ban?

28. (3.5.17)** Van-e olyan $f \in \mathbb{Z}[x]$, hogy minden $g \in \mathbb{Z}[x]$ nem konstans polinomra az $f(g(x))$ polinom irreducibilis \mathbb{Q} fölött?

29. (3.5.18)** Annak felhasználásával, hogy $x^3 - 2$ irreducibilis \mathbb{Q} fölött, mutassuk meg, hogy $\sqrt[3]{4}$ nem írható föl $a + b\sqrt[3]{2}$ alakban, ahol $a, b \in \mathbb{Q}$.

30. (A racionális gyökteszt kiegészítése*) Legyen p/q racionális gyöke az f egész együtthatós polinomnak, ahol $(p, q) = 1$. Bizonyítsuk be, hogy $p - q \mid f(1)$ és $p + q \mid f(-1)$.

31. (*) Igazoljuk, hogy ha f egész együtthatós és $f(0), f(1)$ páratlan számok, akkor f -nek nincs egész gyöke.

32. ()** Igazoljuk, hogy $x^n + x + 3$ minden $n > 1$ egész számra irreducibilis \mathbb{Z} felett.

33. (3.4.20)** Legyen f egy n -edfokú egész együtthatós polinom. Mutassuk meg, hogy ha f helyettesítési értéke legalább $2n + 1$ helyen prímszám, akkor f irreducibilis \mathbb{Z} fölött.

34. ()** Mutassuk meg, hogy az alábbi polinomok irreducibilisek \mathbb{Q} és \mathbb{Z} fölött. Rajzoljuk le a Newton-poligonjukat is (alkalmas prímet használva). $6x^4 + 3x + 1$, $x^5 + 3x^4 + 36x^2 + 54x + 9$, $x^7 + 32$, $x^n + x^{n-1} + 3$, $x^n + 3x + 27$.

35. ()** Rajzoljuk le $y^2 + xy - x$ (mint y polinomjának) Newton-poligonját v_x -re nézve. Alkalmas n -re fejtsük $x^{1/n}$ hatványsorába az $y^2 + xy - x = 0$ egyenlet mindkét ($y_1(x)$, illetve $y_2(x)$) megoldását.

36. ()** Bontsuk irreducibilis faktorokra az $(x + y + z)^k - x^k - y^k - z^k$ polinomot $k = 3$ és $k = 5$ esetén.