Bsc algebra1 gyakorlat

Hetedik és nyolcadik előadás-dia

1. Írjuk fel $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ inverzében az első sor második elemét a ferde kifejtési tétel alapján.

2. Legyenek A, B, C olyan $n \times n$-es mátrixok, melyekre $\det A = 3$, $\det B = 6$, $\det C = 4$. Mennyi lesz az $A^3 B^{-1} C A^{-2}$ mátrix determinánsa?

3. ***(K4.2.25**)*** Adjuk meg az alábbi hat permutáció ciklusfelbontását és előjelét.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 5 & 6 & 1 & 4 & 3 & 8 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 7 & 6 & 4 & 8 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c & d & e \\ c & a & e & b & d \end{bmatrix}$$

$$(1234)(35)(1432)(35)\,, \quad (12345)(234)(12345)^{-1}\,, \quad [(12)(23)(34)]^{1222}\,.$$

Tegyük meg ugyanezt az $\{1, 2, \ldots, n\}$-en értelmezett „hátulról előre” permutációval is.

4. ***(K4.2.23**)*** Igazoljuk, hogy $(x_1 \ldots x_k) = (x_1 x_2)(x_2 x_3) \ldots (x_{k-2} x_{k-1})(x_{k-1} x_k)$.

5. ***(K4.8.14**)*** Mutassuk meg, hogy ha $(x_1 \ldots x_k)$ egy ciklus az S_n csoportban, és $f \in S_n$, akkor $f \circ \big(x_1 \ldots x_k\big) \circ f^{-1} = \big(f(x_1) \ldots f(x_k)\big)$.

6. ***(K4.2.31**)*** Mely $f \in S_n$ permutációk cserélhetők föl az $(1, 2, \ldots, n)$ ciklussal?

7. ***(K4.2.30**)*** Igazoljuk, hogy minden páros permutáció hármasciklusok szorzata.

8. ***(K4.2.32**)*** Igazoljuk, hogy egy permutáció pontosan akkor hatványa egy ciklusnak, ha diszjunkt ciklusfelbontásában a ciklusok hossza azonos (az egyelemű ciklusok nélkül).

---

9. ***(2.5.7)*** Számítsuk ki x alábbi két polinomjának az együtthatóit: $(x - b_1)(x - b_2)(x - b_3)$ és $c(x - b_1)(x - b_2)(x - b_3)(x - b_4)$.

10. ***(2.5.14)*** Határozzuk meg a $2x^4 + 2x + 3$ polinom komplex gyökeinek összegét, szorzatát, négyzetösszegét, és a gyökök reciprokainak összegét.

11. ***(2.5.15)*** A gyökök és együtthatók összefüggése alapján számítsuk ki az n-edik egységgyökök összegét, négyzetösszegét és szorzatát.

12. ***(2.7.16)*** Legyenek a, b, c az $x^3 + 3x + 1$ polinom gyökei. Írjuk fel azt a harmadfokú polinomot, melynek gyökei a^2, b^2, c^2, illetve $a + b$, $a + c$, $b + c$.

13. ***(2.7.15, HF)*** Határozzuk meg az $x^n + x + 1$ polinom (komplex) gyökeinek négyzetösszegét, köbösszegét, és a gyökök reciprokainak összegét ($n \geq 2$).

14. Fejezzük ki a másodfokú egyenlet együtthatóival a gyökök különbségének négyzetét.

---

15. ***(2.6.8**, 2.7.13**)*** Az alábbi $p(x_1, x_2, x_3, x_4)$ polinomot bontsuk föl homogén polinomok összegére, ezeket rendezzük lexikografikusan, és állapítsuk meg a p^7 polinomban egyrészt a lexikografikusan legnagyobb tagot, másrészt a legnagyobb fokú tagok közül a lexikografikusan legnagyobb tagot.

$$i x_1 x_2 x_3 x_4^2 - x_1^2 x_3^3 + 3 x_1^3 x_2 + \pi x_1^2 x_2^3 + x_4 - x_1^2 x_2^2 x_3 + 2 x_1^2 x_2 x_3 x_4 - 6 x_1^2 x_2^2 x_4\,.$$

Helyettesítsük be mindegyik x_i helyére a négy határozatlanú σ_i elemi szimmetrikus polinomot, és adjuk meg az eredménynek egy olyan tagját, amelynek nem nulla az együtthatója.

16. ***(**)*** Legyen $H(y_1, y_2, y_3) = 30y_1y_3^3 - y_2^5$. Helyettesítsük be mindegyik y_i helyére a megfelelő $\sigma_i(x_1, x_2, x_3)$ polinomot, és adjuk meg az eredmény egy nem nulla tagját.

17. ***(3.8.6**)*** Ha egy három határozatlanú szimmetrikus polinom lexikografikusan legnagyobb tagja $x_1^2x_2^2x_3$, akkor lehet-e tagja $x_1x_2^3x_3$? Szerepelhet-e hatodfokú tag? Hány tag lehet legfeljebb? Amikor elemi szimmetrikusakkal írjuk föl, mi az eljárás első lépése?

18. ***(2.7.14**)*** Írjuk föl az elemi szimmetrikus polinomokkal a $\sum_{1\le i\ne j\le n} x_i^2x_j$ polinomot, valamint s_4-et és s_5-öt.

19. ***(2.7.19**)*** Mutassuk meg, hogy nem létezik végtelen sok olyan egytagú $P_1, P_2, \ldots$ n-változós polinom, melyekre $P_1 \succ P_2 \succ \ldots$ teljesül. Igaz-e, hogy egy adott P_1 egytagú polinomnál csak véges sok lexikografikusan kisebb egytagú polinom lehet?

20. ***(2.7.17**)*** Legyen f homogén k-adfokú szimmetrikus polinom, melyben minden határozatlan legfeljebb az m-edik hatványon szerepel. Mutassuk meg, hogy ha $\sigma_1^{k_1} \ldots \sigma_n^{k_n}$ nem nulla együtthatóval szerepel az f-nek az elemi szimmetrikus polinomokkal való fölírásában, akkor $k_1 + k_2 + \ldots + k_n \le m$ és $k_1 + 2k_2 + \ldots + nk_n = k$. Hogyan segítenek ezek a képletek az f polinom elemi szimmetrikus polinomokkal való előállításában?

---

21. ***(2.4.14, HF)*** Adjunk meg a Lagrange- és a Newton-interpoláció segítségével is olyan legfeljebb harmadfokú polinomot, amelyre $f(0) = 3$, $f(1) = 3$, $f(4) = 15$ és $f(-1) = 0$. Mutassuk meg Vandermonde-determináns felhasználásával, hogy az interpoláció mindig elvégezhető (a lineáris egyenletrendszerben az ismeretlenek a keresett polinom együtthatói).

22. ***(2.4.22)*** Tegyük föl, hogy az $f \in \mathbb{C}[x]$ polinom minden racionális/valós helyen racionális/valós értéket vesz föl. Következik-e ebből, hogy f racionális/valós együtthatós?

23. ***(2.6.11**)*** Általánosítsuk az interpolációt többhatározatlanú polinomokra. Mutassuk meg, hogy véges test esetében minden véges sok változós függvény polinomfüggvény.

24. ***(2.4.21**)*** Igazoljuk, hogy n egész alappont és egész értékek esetén akkor és csak akkor van egész együtthatós interpolációs polinom, ha az egyértelműen meghatározott legfeljebb $n-1$-ed fokú racionális együtthatós interpolációs polinom egész együtthatós.

25. ***(2.4.24**)*** Tegyük föl, hogy az $f \in \mathbb{C}[x]$ polinom foka n, és $n+1$ egymást követő egész helyen egész értéket vesz föl. Igazoljuk, hogy léteznek olyan $c_0, \ldots, c_n$ egész számok, hogy

$$f(x) = c_n\binom{x}{n} + \ldots + c_0\binom{x}{0}, \quad \text{ahol} \quad \binom{x}{j} = \frac{x(x-1)\ldots(x-j+1)}{j!}.$$

26. ***(**)*** Legyen f egy egész együtthatós, normált polinom, melynek mindegyik komplex gyöke 1 abszolút értékű. Igazoljuk, hogy f mindegyik gyöke komplex egységgyök.

---

27. ***(3.3.16)*** Adjuk meg az összes olyan tizenkettedfokú valós együtthatós polinomot, melynek az $1+i$ hatszoros gyöke.

28. Egy valós együtthatós, normált, harmadfokú polinomnak gyöke az $1+i$ és a konstans tagja 2. Mi a másik két gyöke?

29. ***(3.3.13)*** Bontsuk föl a következő polinomokat az $\mathbb{R}$ fölött irreducibilis polinomok szorzatára: $x^4 - 1,\ x^4 + 1,\ x^4 + 9,\ x^6 - 4x^3 + 3$.

30. ***(*)*** Hány komplex, illetve valós fölött irreducibilis polinom szorzatára bomlik az x^n+x+1 polinom $(n \ge 2)$?